

ČESKÁ ZEMĚDĚLSKÁ UNIVERZITA V PRAZE

PROVOZNĚ EKONOMICKÁ FAKULTA

Metodologie řešení okružního dopravního problému

disertační práce

Autor: RNDr. Petr Kučera

Školitel: Prof. RNDr. Jaroslav Havlíček, CSc.,
katedra systémového inženýrství

Praha 2009

Obsah

1	Úvod.....	4
2	Cíl a metodika.....	6
3	Rozhodovací procesy a systémy pro podporu rozhodování	9
3.1	Výpočetní složitost problémů	11
4	Okružních dopravní úlohy	16
4.1	Základní pojmy teorie grafů	16
4.2	Typy okružních dopravních úloh.....	17
5	Přehled známých metod pro jednookruhový okružní dopravní problém	19
5.1	Metody pro širší třídy distribučních úloh	20
5.1.1	Metoda výhodnostních čísel	20
5.1.2	Habrovy frekvence.....	21
5.1.3	Patching method	21
5.1.4	Švastova metoda	21
5.1.5	Metoda ztrát	22
5.2	Metody založené na algoritmech teorie grafů.....	22
5.2.1	Metoda nejbližšího souseda	23
5.2.2	Metoda minimální kostry.....	24
5.2.3	Metoda minimální kostry pro ODP s nesymetrickou maticí sazeb	24
5.2.4	Metoda zařizování.....	25
5.2.5	Vkládací metody	25
5.2.6	Christofidova metoda.....	27
5.3	Metody pro Euklidovský ODP	28
5.3.1	Metody konvexního obalu	28
5.3.2	Arorova metoda	29
5.4	Metody zlepšující řešení	30
5.4.1	r-opt	30
5.4.2	Or-opt.....	31
5.4.3	Lin-Kernighanova metoda	31
5.4.4	Metody výměn pro ODP s nesymetrickou maticí sazeb.....	32
6	Přehled známých metod pro vybrané typy víceokruhových úloh.....	33
6.1	Metody pro víceokruhový okružní dopravní problém kapacitně omezený	33
6.1.1	Mayerova metoda	33
6.1.2	Bin packing problem a Fernandez de la Vega - Luekerova metoda	33
6.2	Metody pro časově omezený rozvozní problém	34
6.2.1	Metoda nejbližšího souseda	35
6.2.2	Metoda vkládací.....	35
6.2.3	Metoda výhodnostních čísel	35
7	Víceokruhový časově omezený rozvozní problém	37
7.1	Další metody pro víceokruhový časově omezený rozvozní problém	37
7.1.1	Metoda stromů	37
7.1.2	Paralelně postupující verze metody výhodnostních čísel	39
7.1.3	Aplikace Habrových frekvencí	40
7.2	Typy úloh pro testování	40
7.3	Výsledky	41
7.3.1	Typ 1	41
7.3.2	Typ 2	59
7.3.3	Typ 3	64
7.3.4	Shrnutí.....	73

8	Kapacitně omezený víceokruhový okružní dopravní problém	91
8.1	Další metody pro kapacitně omezený víceokruhový problém.....	91
8.1.1	Fernandez de la Vega - Luekerova metoda	91
8.1.2	Metoda výhodnostních čísel	92
8.1.3	Aplikace Habrových frekvencí	92
8.2	Typ úloh pro testování	93
8.3	Výsledky	93
9	Závěr	114
	Literatura.....	117
	Přehled vlastních publikací.....	121

1 Úvod

S okružními dopravními problémy se v praxi setkáváme často. V případech, kdy je třeba rozvést určitý materiál od jednoho nebo několika málo dodavatelů k většímu množství spotřebitelů nebo naopak od mnoha dodavatelů k jednomu či jen malému počtu odběratelů, se okružním spojením ušetří v porovnání se situací, kdyby byla realizována každá trasa od dodavatele ke spotřebiteli zvlášť, náklady na jednotlivé výjezdy vozidel od stejného dodavatele nebo jízdy k jednomu spotřebiteli.

Existuje mnoho typů okružních úloh. Pro většinu z nich ale není znám žádný efektivní algoritmus, který by uměl najít jejich přesné teoretické optimum. Všechny známé postupy, které by to dokázaly, potřebují počet operací rostoucí exponenciálně s velikostí dat (počtem míst, dodavatelů či odběratelů), což je řádově stejné množství jako při řešení „hrubou silou“, tj. výpočtem hodnot účelové funkce pro všechna přípustná řešení úlohy a výběrem toho z nich, u něhož byla takto zjištěna optimální. Současná výpočetní technika umožňuje tímto způsobem na nejvýkonnějších strojích přesně řešit úlohy v rozsahu nejvýše do cca 20 míst a vzhledem k uvedené exponenciální závislosti toto číslo poroste i při bouřlivém rozvoji výpočetní techniky velmi pomalu.

„Nejklasičtější“ z těchto úloh je jednookruhový okružní dopravní problém. Přeprava mezi všemi obsluhovanými místy má být v tomto případě realizována jedním okruhem. Často bývá označení okružní dopravní problém (ODP), pokud je uváděno bez dalších upřesňujících informací, používáno právě pro tento typ úlohy a bude tomu tak i v této práci. Bývá také nazýván problémem obchodního cestujícího, v anglické literatuře „traveling salesman problem“.

ODP je nejčastěji řešeným typem okružních úloh, je totiž i součástí některých složitějších okružních problémů. Je ale také snad nejčastěji řešenou úlohou ze třídy tzv. NP-úplných problémů, což jsou úlohy, které nejsou efektivně řešitelné, ale přitom jsou většinou snadno formulovatelné, což budí dojem jednoduchosti. Proto existuje mnoho aproximačních metod a heuristik, které dávají jen přibližná řešení ODP, ovšem považovaná za ekonomická optima. Jednotlivé metody se mezi sebou často velmi liší jak svou podstatou, tak i typy a vlastnostmi úloh, pro které jsou definovány, pro které byly navrženy tak, aby pro ně dávaly co nejlepší výsledky, i pro které skutečně dobré výsledky dávají. Je-li ovšem zadána konkrétní úloha, bývá někdy těžké rozhodnout, která z širokého spektra metod by měla dát nejlepší řešení. Publikace, které by se zabývaly výběrem vhodných metod pro speciální typ úlohy (zejména z věcného či ekonomického hlediska), lze nalézt jen velmi obtížně.

Pro praktické řešení ODP neexistuje ani žádný všeobecně rozšířený software, první programy se na internetu teprve objevují a uživatel ani nemá možnost se dovědět, jakou konkrétní metodu používají. Firmy zpravidla řeší tyto úlohy „ručně“ bez využití některé konkrétní metody, a to i v případech, že jinak, např. při pořizování dat pro tyto úlohy, využívají nejmodernější ICT.

Často je třeba řešit komplikovanější situace než jednookruhový ODP. Může se stát, že je třeba přepravit velké množství materiálu, na které jedna okružní jízda vzhledem ke kapacitě vozidla nestačí. Další potíží může být požadavek provést přepravu rychle, do určitého časového limitu, během kterého nelze vzdálenosti potřebné k objetí všech míst urazit. Pak je třeba vytvořit více okruhů, tj. z centrálního stanoviště musí vyjet více než jedno vozidlo, případně musí jedno vozidlo absolvovat více jízd, a ostatní místa či stanoviště (dodavatelé, spotřebitelé) musí být vhodně rozdělena do skupin, z nichž každá bude obsloužena při jedné jízdě. Tyto úlohy se v zahraniční literatuře označují jako „vehicle routing problems“, v češtině se někdy používá název trasovací problémy.

Důvody, proč nelze transport provést jedním okruhem, a omezení, která to zapříčiňují, mohou být rozmanité. Jednotlivé konkrétní případy těchto víceokruhových problémů se tedy navzájem od sebe velmi liší, a proto je jejich výzkumu věnována podstatně menší pozornost než ODP. Metod pro jejich řešení je mnohem méně a jsou publikovány (pokud vůbec) v méně významných časopisech a sbornících, a pro případné uživatele jsou tak hůře dostupné.

2 Cíl a metodika

Tato práce se soustředí na víceokruhové okružní dopravní problémy. Budou vyhledány ty typy, které se v praxi objevují často. Pro každý z nich bude uveden přehled metod. Některé metody budou čerpány z literatury, další budou navrženy nové, především modifikací metod pro ODP a další dopravní a distribuční úlohy. Cílem práce je shromáždit co nejvíce těchto metod, otestovat kvalitu jimi získaných řešení v závislosti na určitých vlastnostech úlohy, jejichž pomocí by uživatel z praxe dokázal úlohu snadno charakterizovat a podle toho vybrat co nejvhodnější metodu pro její řešení. Získané informace lze použít také jako součást při tvorbě systému pro podporu rozhodování určeného pro řešení víceokruhových úloh, který pro zadaný problém vybere vhodnou metodu, aniž by se o to uživatel musel starat.

Pro účely testování budou definovány jednotlivé typy či třídy úloh. Úlohy v každé třídě budou charakterizovány těmito vlastnostmi (tj. budou se v těchto vlastnostech shodovat):

- typ víceokruhového problému,
- velikost (počet obsluhovaných míst),
- způsob rozmístění míst v dané oblasti,
- charakteristika konkrétních okolností způsobujících, že nelze rozvoz řešit jedním okruhem.

Kromě toho budou ještě vytipovány další vlastnosti, na které nebyl brán při definici tříd ohled, tj. kterými se úlohy z jedné třídy mohou a budou lišit, ale budou se v nich moci shodovat úlohy z různých tříd. Takovými vlastnostmi jsou např.:

- umístění centrálního stanoviště v obsluhované oblasti (zda leží blízko jejího středu či na okraji),
- počet míst určujících konvexní obal této oblasti (tj. počet vzdálených míst v různých směrech od centrálního stanoviště),
- poměr mezi největší a průměrnou vzdáleností od centrálního místa,
- poměr mezi největší vzdáleností a mediánem vzdáleností od centrálního místa,
- počet míst s velkými kapacitami,
- podíl velkých kapacit na celkové sumě kapacit,
- podíl velkých kapacit mezi místy na konvexním obalu oblasti,
- poměr mezi největší vzdáleností a průměrnou vzdáleností míst s velkými kapacitami od centrálního místa,

- poměr mezi největší vzdáleností místa s velkou kapacitou a průměrnou vzdáleností míst s velkými kapacitami od centrálního místa,
- poměr mezi největší vzdáleností a mediánem vzdáleností míst s velkými kapacitami od centrálního místa,
- poměr mezi největší vzdáleností místa s velkou kapacitou a mediánem vzdáleností míst s velkými kapacitami od centrálního místa,
- případně další vlastnosti.

Od každé třídy budou vygenerovány příklady a vyřešeny pomocí jednotlivých metod. Výsledky budou podrobeny následující statistické analýze, která vybere pro každou vlastnost úlohy nejvhodnější metody.

Pro každou třídu úloh bude sestaven statistický soubor dat, který bude obsahovat jako statistické znaky jednak výsledky získané jednotlivými testovanými metodami, jednak hodnocení úloh podle jednotlivých výše uvedených dalších vlastností. Každý tento statistický soubor bude podroben regresní analýze, korelační analýze a analýze hlavních komponent.

Pro zjištění, jakým způsobem určitá vlastnost úlohy ovlivňuje úspěšnost dané metody, je třeba především určit, zda s rostoucí hodnotou statistického znaku charakterizujícího tuto vlastnost roste či klesá hodnota statistického znaku, který popisuje výsledek dosažený touto metodou (podle toho lze rozpoznat, zda je metoda výhodná pro úlohy s nízkou či vysokou hodnotou znaku charakterizujícího danou vlastnost). Při aplikaci regresní analýzy k tomu plně postačí lineární regrese. Pro každou metodu bude tedy provedena vícenásobná lineární regrese závislosti jejího statistického znaku na znacích popisujících vlastnosti úlohy. Důležitá budou zejména znaménka koeficientů lineárních členů v rovnici regresní nadroviny. Absolutní hodnoty budou podstatné až při porovnání různých metod vhodných pro úlohy se stejnou vlastností. Je třeba věnovat pozornost také tzv. p-hodnotám těchto koeficientů, které, zhruba řečeno, popisují, jak dobře vypočtená regresní nadrovina charakterizuje realitu.

Korelační analýza zjišťuje míru těsnosti lineární závislosti mezi jednotlivými dvojicemi náhodných veličin. Předpokládá normalitu jejich rozdělení, což v případě statistického souboru zpracovávaného v této práci není splněno (např. vzhledem k diskrétnímu charakteru některých sledovaných vlastností úlohy), a tak tato analýza nemusí úspěšně odhalit všechny případy závislosti kvality řešení získaného danou metodou na určité vlastnosti řešení, zvláště, když navíc tato závislost ani nemusí být právě lineární. Korelační analýza tedy vytipuje jen některé případy vhodnosti metody pro úlohy s určitou vlastností. Na druhé straně bude porovnáván každý statistický znak s každým. Mohou tak být nalezeny

dvojice či skupiny metod, které dávají pro všechny úlohy podobné výsledky, a v případě aplikace různých metod ve snaze nalézt co nejlepšího řešení dané úlohy tedy stačí zkoušet z této skupiny jen jednu metodu. Podobně lze nalézt závislosti i mezi vlastnostmi úloh, a tak ukázat, že některé vlastnosti úloh je zbytečné sledovat.

Poslední typ statistické analýzy – analýza hlavních komponent – bude použita pro vytvoření (definici) menšího počtu statistických znaků (tj. nových uměle vytvořených vlastností úlohy), které by úlohu charakterizovaly pokud možno stejně kvalitně jako původní velký počet vlastností. Tyto nové agregované vlastnosti úlohy budou použity pro další regresní analýzu provedenou podobným způsobem jako pro původní proměnné. Na základě výsledků této analýzy bude moci uživatel volit metodu pro danou konkrétní úlohu podle menšího počtu vlastností (byť agregovaných), které ale budou úlohu z hlediska výběru metody lépe charakterizovat. Nevýhodou je, že výsledky této analýzy mohou být opět zkreslené tím, že náhodné veličiny ve statistickém souboru dat nebudou mít normální rozdělení.

Členění práce do kapitol bude tedy vypadat následovně: V nejbližší kapitole je podán úvod do teorie rozhodování s důrazem na její výpočetní stránku. Dále je čtenář seznámen s terminologií z oblasti teorie grafů a okružních úloh. Následují dvě kapitoly s přehledem známých metod pro řešení těchto úloh, první pro jednookruhový ODP a druhá pro víceokruhové úlohy. Další dvě kapitoly obsahují vlastní výsledky pro dva vybrané typy víceokruhových úloh: první pro časově omezený rozvozní problém a druhé pro víceokruhový okružní dopravní problém omezený kapacitně. Nakonec jsou shrnuty závěry práce.

3 Rozhodovací procesy a systémy pro podporu rozhodování

Pokud je řečeno, že okružní úlohy jsou složitými rozhodovacími problémy a tato skutečnost má být zohledněna při hledání a výběru metod pro jejich řešení, je třeba charakterizovat, v čem jejich složitost spočívá. K tomu poslouží širší úvod do teorie rozhodování.

Rozhodovací se proces dělí na čtyři fáze (viz [21]):

- zjišťování podmínek vyvolávajících nutnost rozhodovat, identifikace a popis problému (tato fáze bývá také označována jako analýza okolí rozhodovacího procesu),
- návrh možných řešení – jejich vyhledávání, tvorba vymyšlení, rozvoj a analýza,
- volba řešení k realizaci z variant navržených v předchozí etapě,
- implementace řešení a hodnocení skutečně dosažených výsledků jeho realizací, výsledky této etapy mohou iniciovat nový rozhodovací proces.

Rozhodovací proces v sobě zahrnuje následující součásti (prvky):

- cíl či cíle rozhodování, tj. to, čeho chce rozhodovatel dosáhnout,
- kritéria hodnocení, podle kterých rozhodovatel hodnotí výhodnost jednotlivých variant (řešení, rozhodnutí),
- subjekt rozhodování (rozhodovatel),
- objekt rozhodování, tj. to, co chce rozhodovatel změnit, vylepšit,
- varianty řešení, z kterých může rozhodovatel vybírat,
- důsledky (dopady, účinky) jednotlivých variant na objekt rozhodování,
- stavy světa, tj. vzájemně se vylučující situace, které mohou nastat po realizaci varianty a mohou mít vliv na její důsledky.

Rozhodovací procesy či problémy lze klasifikovat podle různých hledisek. Jedním ze základních způsobů členění je jejich rozdělení na dobře a špatně strukturované. „Dobře strukturované rozhodovací problémy (označujeme je též jako jednoduché, programované, resp. algoritmizované) se zpravidla opakovaně řeší na operativní úrovni řízení a existují pro ně rutinní postupy řešení. Algoritmus zde chápeme jako existenci procedury, pomocí které se vstupní informace rozhodovacího procesu transformují jednoznačně na informace výstupní, tj. rozhodnutí. Pro tyto problémy je charakteristické, že proměnné, které se v nich vyskytují, lze vesměs kvantifikovat a mají zpravidla jediné kvantitativní kritérium hodnocení.

Pro špatně strukturované rozhodovací problémy jsou charakteristické:

- existence většího počtu faktorů ovlivňujících řešení daného problému; některé z těchto faktorů nejsou přesně známy, pouze část je kvantifikovatelná a existují mezi nimi složité a proměnlivé vazby,
- náhodnost změn některých prvků okolí firmy, kde řešení probíhá,
- existence většího počtu kritérií hodnocení variant řešení, z nichž některá jsou kvalitativní povahy,
- obtížná interpretace informací potřebných pro rozhodnutí a proměnných popisujících okolí.“ [21]

Dalším klasifikačním hlediskem je informace o stavech světa a důsledcích variant vzhledem k jednotlivým kritériím hodnocení. „V případě úplné informace, tzn. že rozhodovatel ví s jistotou, který stav světa nastane a jaké budou důsledky variant, mluvíme o rozhodování za jistoty. Pokud rozhodovatel zná možné budoucí situace (stavy světa), a současně zná i pravděpodobnosti těchto stavů světa, pak jde o rozhodovací proces za rizika. Pokud nejsou rozhodovateli známy pravděpodobnosti jednotlivých stavů světa, jde o rozhodování za nejistoty.

Z hlediska faktoru času lze rozhodovací procesy třídit na procesy statické a procesy dynamické podle toho, zda se v čase mění nebo nemění množina variant rozhodování, popř. jejich důsledky a hodnocení těchto důsledků v závislosti na preferenčním systému rozhodovatele. Při diskrétně uvažovaném čase se druhy rozhodování, vzniklé touto klasifikací, nazývají rozhodování jednoetapové (jednostupňové) a víceetapové (vícestupňové).

Podle počtu kritérií hodnocení se rozhodovací procesy třídí na procesy s jediným kritériem hodnocení (jednokritériální rozhodování) a procesy s větším počtem kritérií (vícekritériální rozhodování).

Podle toho, zda důsledku variant nezávisí či závisí na strategii, kterou vědomě volí přemýšlející protivník, rozlišujeme rozhodovací procesy nekonfliktní a konfliktní.“ [21]

Podrobnější přístup k rozhodovacímu procesu a zejména k jeho druhé fázi, tj. způsobu návrhu možných řešení, nabízí **systémová analýza**. Její postup spočívá v tom, že po identifikaci (formulaci, analýze) problému je na zkoumaném objektu rozhodování zaveden systém, tj. účelově orientovaná struktura (s cílem vyřešit daný problém) prvků a vazeb mezi nimi. Na základě tohoto systému je vytvořen systémový (matematický) model, který je kvantifikován a posléze podroben výpočtům a experimentům. Jejich výsledky potom poslouží k volbě řešení, které je nakonec implementováno a realizováno v praxi.

Rozhodovací proces mohou rozhodovateli usnadnit **systemy pro podporu rozhodování** (SPR). Tímto názvem jsou označovány interaktivní hardwarové a softwarové informační systémy, které mají za cíl pomáhat ve všech fázích rozhodovacího procesu. Myšlenka vytvořit takové systémy se objevila počátkem 70. let 20. století a za jejich zakladatele jsou považováni Scott Morton a Gorry [28]. Během 70. let ovšem dochází k velkému rozvoji výpočetní techniky a různých typů informačních systémů, a tak jasný rozdíl mezi SPR a ostatními typy se vymezuje až počátkem 80. let. SPR se od ostatních informačních systémů liší především tím, že mají být využívány a obsluhovány přímo manažery či rozhodovateli, a svým interaktivním a komunikačním charakterem.

Také u samotných SPR lze rozlišovat různé jejich typy. Základní klasifikaci lze provést podle toho, co je jejich podstatou, na čem jsou založeny:

- datově orientované – vyhledávají, zpracovávají a analyzují tvrdá, kvantitativní data z rozsáhlých (často i externích) databází,
- dokumentově orientované – zpracovávají měkká, kvalitativní a subjektivní data, texty, dokumenty, webové stránky,
- modelově orientované – celému SPR dominuje komponenta modelu, přičemž systém nevyžaduje tak rozsáhlá data jako předchozí typy, příkladem jsou účetní a finanční modely, optimalizační modely či statistické modely,
- znalostně orientované – využívají při své činnosti (získávají, skladují a zpracovávají) znalosti ve formě pravděpodobností, možností, vztahů souvislostí a pravidel, a vytvářejí tak návrhy pro manažera či rozhodovatele,
- komunikačně orientované – umožňují, podporují a koordinují spolupráci různých velkých skupin rozhodovatelů a skupinové rozhodování.

Existují i jiné způsoby klasifikace, např. podle toho, pro jaké uživatele jsou určeny, podle použité technologie, podle účelu, ke kterému mají sloužit atd.

Při tvorbě SPR pro okružní dopravní úlohy bude, podle toho, co bylo řečeno v úvodu této práce, nejnáročnější jejich modelová, případně znalostní stránka. Z hlediska dat či dokumentů by naopak žádný problém být neměl.

3.1 Výpočetní složitost problémů

Okružní úlohy patří tedy mezi dobře strukturované problémy rozhodování za jistoty s kvantifikovatelnými proměnnými a jediným kvantitativním kritériem hodnocení, jsou zároveň jednoetapové, statické a nekonfliktní. Podle těchto hledisek by se měly řadit mezi nejjednodušší typy problémů. Složitost okružních úloh ovšem spočívá v něčem zcela jiném:

v jejich výpočetní stránce. Omezme se nyní pouze na problémy s výše uvedenými „hezkými“ vlastnostmi a definujme přesně, kdy je takový problém jednoduchý a kdy složitý, neboli zda je či není efektivně řešitelný. Metoda či algoritmus pro jeho řešení, má určité nároky jednak na počítačovou paměť a jednak na čas potřebný pro výpočet. S pamětí prakticky žádné potíže nejsou, počítače jsou vybaveny stále větší kapacitou vnitřní paměti, navíc není technicky obtížné zajistit prakticky neomezený rozsah paměti vnější. V případě času už však situace tak příznivá není. „Existuje řada úloh z teorie grafů a operační analýzy, u nichž nejsme schopni zaručit nalezení optimálního řešení ani na nejvýkonnějších počítačích a většina z nich patří do třídy tzv. NP-úplných problémů. Někteří autoři dokonce o NP-úplných problémech mluví jako o úlohách z praktického hlediska neřešitelných.“ [45]

Toto tvrzení zůstává bohužel pravdivé i zhruba čtvrtstoletí po vyjití [45] (i když velikost úloh řešitelných metodou „hrubé síly“ se díky rozvoji výpočetní techniky přece jen zvolna zvyšuje). Už Edmonds [18] si v polovině 60. let 20. století všiml následujícího zajímavého pozorování vhodného pro definici rychlého algoritmu, i když „hranice mezi rychlým a pomalým algoritmem je tak neostrá, že proti každé striktní definici bude možné vznést řadu oprávněných námitek.

Čas, který potřebují ke zpracování vstupních dat velikosti n algoritmy považované za rychlé, bývá zpravidla shora omezen funkcemi typu n , $\log n$, n^2 , n^3 apod. Jako horní odhad lze vždy proto použít polynom.

Na druhé straně typický představitel pomalých algoritmů, metoda „hrubé síly“, která probírá všechny možnosti, vyžaduje alespoň 2^n kroků, probírají-li se všechny podmnožiny dané množiny o n prvcích, $n!$ kroků, probíráme-li všechny permutace, a n^n kroků, probíráme-li všechna její zobrazení do sebe. Odhad počtu kroků je tedy alespoň exponenciální.

Budeme proto považovat algoritmus za rychlý, jestliže existuje polynom p tak, že počet kroků, které algoritmus provede při výpočtu, je omezen číslem $p(n)$, kde n je velikost vstupních dat. Pokud takový odhad neexistuje, budeme algoritmus považovat za pomalý.

Abychom ilustrovali rozdíly mezi algoritmy pracujícími v polynomiálně omezeném čase a exponenciálními algoritmy, ukážeme v následující tabulce čas potřebný ke zpracování vstupních dat velikosti n , jestliže počet operací, které je nutné provést, je udán funkcí $f(n)$ a provedení jedné operace trvá jednu mikrosekundu.

Tabulka 1 Čas potřebný pro zpracování dat v závislosti na počtu nutných operací [45]

Operací	n							
	20	40	60	80	100	200	500	1000
n	20 μ s	40 μ s	60 μ s	80 μ s	0,1 ms	0,2 ms	0,5 ms	1 ms
$n \log n$	86 μ s	0,2 ms	0,35 ms	0,5 ms	0,7 ms	1,5 ms	4,5 ms	10 ms
n^2	0,4 ms	1,6 ms	3,6 ms	6,4 ms	10 ms	40 ms	0,25 s	1 s
n^3	8 ms	64 ms	0,22 s	0,5 s	1 s	8 s	125 s	17 min
n^4	0,16 s	2,56 s	13 s	41 s	100 s	27 min	17 h	11,6 dní
2^n	1 s	11,7 dní	36600 let	$3,6 \cdot 10^9$ let				
$n!$	77000 let							

Ještě lépe je vidět rozdíl mezi polynomiálními a exponenciálními algoritmy z tabulky, která ukazuje zvětšení rozsahu zpracovatelných úloh, které odpovídá zvětšení výpočetní rychlosti použitého počítače 10x, 100x, 1000x, za předpokladu, že původně bylo možno v daném časovém limitu zpracovat vstupní data velikosti $n = 100$.

Tabulka 2 Zkrácení doby výpočtu při zvětšení výpočetní rychlosti [45]

$f(n)$	Zrychlení výpočtu			
	1x	10x	100x	1000x
n	100	1000	10000	100000
$n \log n$	100	702	5362	43150
n^2	100	316	1000	3162
n^3	100	215	464	1000
n^4	100	177	316	562
2^n	100	103	106	109
$n!$	100	100	100	101

Z tabulek je vidět, že pro exponenciální algoritmy je typická existence mezní velikosti vstupních dat, nad níž je úloha neřešitelná i v případě, že by došlo ke zvýšení rychlosti počítače o několik řádů.

Je možné namítnout, že algoritmus, který pracuje v čase n^{100} nebo $2^{100}n$ je také nepoužitelný, i když časové omezení je polynomiální a ve druhém případě dokonce lineární. Ukazuje se ale, že pokud se pro nějakou úlohu „ze života“ podaří nalézt algoritmus

s polynomiálním časovým omezením, pak stupeň polynomu nebývá větší než 3 nebo 4 a i jeho koeficienty mívají „rozumnou“ velikost.“ [45]

Hledáme-li rychlý, efektivní (polynomiální) algoritmus pro určitou úlohu, můžeme postupovat tak, že najdeme rychlý, efektivní (polynomiální) převod (redukci) této úlohy na jinou, pro kterou je algoritmus s požadovanou rychlostí již znám. Výchozí úlohu lze pak efektivně řešit tak, že se nejprve provede tento převod a pak se druhá úloha, která se řešit umí, vyřeší.

Na počátku 70. let Cook [12] charakterizoval úlohy, které lze v polynomiálním čase takto redukovat na úlohu určování splnitelnosti logických formulí v konjunktivním normálním tvaru. Tato třída je matematicky označována jako *NP*, což je zkratka slov „nedeterministicky polynomiální“. Je to totiž třída problémů, pro jejichž řešení existuje **polynomiální nedeterministický algoritmus**.

„Nedeterministický algoritmus se od deterministického liší tím, že v některých nebo ve všech krocích výpočtu je možné se zcela libovolně rozhodnout pro některé z několika možných pokračování výpočtu. Výpočet tedy není jednoznačně určen počáteční konfigurací a místo výpočet bychom měli spíše říkat systém možných výpočtů.“ [45]

Je třeba ještě říci, co je výsledkem nedeterministického algoritmu. „Nedeterministický algoritmus neurčuje pro daná data jedinou posloupnost operací, nýbrž celý systém přípustných výpočtů, které dávají různé výsledky.“ [45]

Pro optimalizační úlohy se z těchto výsledků vybere ten s nejlepší hodnotou účelové funkce.

Je zřejmé, že úlohy, pro které existuje polynomiální (deterministický) algoritmus, patří do třídy *NP* (deterministický algoritmus je vlastně speciální případ nedeterministického).

Krátce po publikaci předchozího Cookova výsledku Karp [38] předložil seznam asi dvaceti problémů, které lze navzájem redukovat v polynomiálním čase jeden na druhý (tj. všechny jsou stejně algoritmicky složité). Tyto úlohy se nazývají **NP-úplné** (anglicky NP-complete) a do dneška se jejich třída rozrostla na několik stovek. Časem se ukázalo, že všechny úlohy třídy *NP* se dají redukovat na NP-úplné, tj. NP-úplné úlohy jsou nejsložitější z celé třídy *NP*.

Pro účely této práce bude zapotřebí pojmenování pro úlohy, pro které není znám polynomiální algoritmus, ale zároveň se o nich neví, zda patří zrovna mezi NP-úplné. Zde panuje v názvosloví mezi různými autory určitá nejednotnost. V literatuře se vyskytují pojmy **NP-těžké**, **NP-obtížné** (v zahraniční literatuře NP-hard). Někteří autoři takto označují všechny úlohy třídy *NP* (včetně těch, pro které je znám polynomiální algoritmus), naopak

zejména matematictí autoři, např. Kučera [45], používají termín NP-těžké pro úlohy, na které lze redukovat NP-úplné problémy, ale pro které není znám polynomiální nedeterministický algoritmus (tj. nejsou ve třídě *NP*, a jsou tedy složitější než NP-úplné). V této práci ale budou mít tyto pojmy význam, jaký jim obvykle dávají autoři z oblasti operačního výzkumu, tj. budou značit všechny úlohy, pro které není znám polynomiální algoritmus, ale zároveň o nich není dokázáno, či se jen nezajímáme o to, zda jsou NP-úplné.

4 Okružních dopravní úlohy

4.1 Základní pojmy teorie grafů

Vzhledem k tomu, že jeden ze způsobů, jak definovat a popisovat okružní úlohy, je využít teorie grafů, je třeba se nejprve seznámit s jejími základními pojmy týkajícími se grafů bez smyček a bez vícenásobných hran. Budeme vycházet z následující terminologie.

„**Graf** je dvojice $G = (V, E)$, kde V je množina, jejíž prvky se nazývají **vrcholy** nebo **uzly** grafu, E je množina neuspořádaných dvojic $\{u, v\}$, kde u, v jsou dva různé prvky množiny V . Prvky množiny E nazýváme **hranami** grafu. Množiny V, E grafu G budeme značit $V(G), E(G)$.

*Je-li v vrchol grafu, pak **stupeň vrcholu** v je počet hran grafu G , které z v vycházejí.*

Podgraf G' grafu G je graf, pro který platí $V(G) \subset V(G'), E(G) \subset E(G')$.

Orientovaný graf je dvojice (V, E) , kde V je množina nazývaná **množinou vrcholů** orientovaného grafu G a E je množina obsahující uspořádané dvojice různých prvků množiny V . Prvky množiny E nazýváme **orientované hrany**, pokud nebude hrozit nedorozumění, budeme používat slovo *hrana*. Na odlišení od orientovaného grafu používáme někdy pro graf název **symetrický graf** nebo **neorientovaný graf**. Neorientovaný graf chápeme často jako speciální případ orientovaného grafu tak, že si hranu $\{v, w\}$ představujeme jako dvojici hran orientovaných, tedy dvojici $(v, w), (w, v)$. Úvahy platné pro orientované grafy jsou tedy obecnější, neboť zahrnují i neorientovaný případ.“[45]

V orientovaném grafu se počet hran, které vycházejí z vrcholu (kde je uvažovaný vrchol prvním v uspořádané dvojici), nazývá **výstupní stupeň vrcholu** a počet hran, které vcházejí do vrcholu (kde je uvažovaný vrchol druhým v uspořádané dvojici), nazývá **vstupní stupeň vrcholu**.

Graf se nazývá **úplný**, jestliže množinou jeho hran jsou všechny neuspořádané (pro neorientovaný případ), resp. uspořádané (pro orientovaný případ) dvojice uzlů z V .

„**Sled** v neorientovaném grafu G je posloupnost vrcholů $v_0, \dots, v_k$ taková, že $\{v_{i-1}, v_i\}$ je hranou pro $i = 1, \dots, k$. Jestliže pro $i \neq j$ platí $v_i \neq v_j$, pak se tento sled nazývá **cesta**. Pokud cesta obsahuje všechny vrcholy grafu, nazývá se **hamiltonovská cesta**. Je-li $v_0 = v_k$, mluvíme o **uzavřeném sledu**, a je-li navíc $v_i \neq v_j$ pro $1 \leq i < j \leq k$, dostáváme **kružnici**. **Hamiltonovská kružnice** je kružnice obsahující všechny vrcholy grafu.

Posloupnost vrcholů $v_0, v_1, \dots, v_k$ orientovaného grafu se nazývá **orientovaný sled**, jestliže (v_{i-1}, v_i) je orientovaná hrana pro $i = 1, \dots, k$. Je-li tato posloupnost prostá,

dostáváme **orientovanou cestu**. Obdobně je možné definovat **uzavřený orientovaný sled**; místo orientovaná kružnice se užívá název **cyklus**.

Graf G se nazývá **souvislý**, jestliže pro každé dva různé vrcholy v, w existuje v grafu cesta začínající ve vrcholu v a končící ve vrcholu w .“[45]

Sled, ve kterém se opakují vrcholy, ale všechny jeho hrany jsou různé, se nazývá **tah**. Tah obsahující všechny hrany grafu je **eulerovský tah**. Tah i eulerovský tah lze definovat pro neorientovaný i orientovaný graf.

„**Párování** je podgraf G' grafu G takový, že každý vrchol grafu G' má stupeň nejvýše 1.“ [45] Má-li každý vrchol stupeň právě 1, jedná se o **perfektní párování**.

„**Strom** je souvislý graf neobsahující kružnici.“[45]

V dalším textu budeme používat k pojmenování prvků množiny V pojem uzel (tedy nikoliv vrchol), který se obvykle používá v terminologii distribučních a dopravních úloh.

4.2 Typy okružních dopravních úloh

Okružní dopravní problém (ODP) neboli „problém obchodního cestujícího je formulován takto: Je dána množina M a pro každé dva její prvky x, y je dáno číslo $d(x, y)$, které budeme nazývat vzdáleností x a y . Cílem je určit, v jakém pořadí má obchodní cestující projet prvky množiny M („města“) tak, aby prošel každým městem právě jednou a pak se vrátil do místa, kde cestu začal, a urazil při tom vzdálenost co možná nejmenší.

Jinými slovy, hledáme uspořádání prvků množiny M do posloupnosti $x_1, \dots, x_n$, která obsahuje každý z prvků M právě jednou a takové, že součet

$$d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_1)$$

je nejmenší možný.“ [45]

Úlohu lze definovat rovněž pomocí pojmů teorie grafů: Vstupem je úplný graf (na alespoň třech uzlech, aby měla úloha smysl) hranově ohodnocený nezápornou váhovou funkcí c (každé hraně e je přiřazena váha $c(e)$). Cílem je najít hamiltonovský cyklus tak, aby suma vah všech jeho hran byla minimální možná (viz [42]).

V této práci budou používány střídavě obě definice podle toho, která bude pro danou situaci vhodnější. Rovněž pro kvantifikaci úlohy budou používány pojmy **vzdálenosti**, **váhy** i **sazby** (z terminologie dopravních úloh). Uzly („města“, místa), kudy je třeba projet, budou indexovány přirozenými čísly a odkazy na ně budou přímo pomocí těchto indexů (namísto obvyklých značení v_i, u_i apod. bude i -tý uzel označován přímo i). Vzdálenost z uzlu i do uzlu j se bude značit c_{ij} .

Několik dalších ekvivalentních definic ODP lze najít např. v [25].

Co se týče složitosti ODP, jeho NP-úplnost ukázal již Karp v [38].

Jak již bylo řečeno v úvodu této práce, v praxi se mnohem častěji vyskytují úlohy, kdy je třeba realizovat rozvoz několika okruhy. Těchto **víceokruhových úloh** existuje celá řada typů podle omezení, která určují možná rozdělení míst (uzlů) do jednotlivých okruhů. Shodným rysem bývá jeden daný centrální uzel (stanoviště), kterým musejí všechny okruhy procházet. Pelikán [55] např. rozlišuje **vícenásobný problém obchodního cestujícího**, kde je zadán přesně počet cyklů (vozidel, obchodních cestujících), kterými je třeba všechny uzly pokrýt, a **trasovací problémy**, kde je situace popsána kapacitou vozidel a kapacitou či požadavkem každého uzlu. Trasovací problémy mohou být s jedním nebo více (centrálními) stanovišti.

Vzhledem k variabilitě víceokruhových úloh nebývá přesně zkoumána jejich výpočetní složitost. Všeobecně ovšem lze říci, že jsou NP-těžké (viz [55]).

V této práci budou přesné definice a značení zaváděny až pro konkrétní víceokruhové úlohy, které budou zkoumány.

Použijeme-li definici okružního problému pomocí teorie grafů, může být požadavek projít všechny uzly grafu nahrazen požadavkem projít všechny hrany. Tuto úlohu poprvé formuloval Kuan [44], a proto bývá označována jako **problém čínského listonoše** (Chinese postman problem) – průchod hranami si lze představovat jako průjezd ulicemi, který musí listonoš absolvovat (takovéto „hranové verze“ okružních úloh obecně – s případnými dodatečnými omezeními apod. – bývají označovány jako **problém listonoše**). Zajímavé je, že Edmonds, Johnson a Ellis [19] našli polynomiální algoritmus pro případy, kdy je graf neorientovaný, tj. každou hranu (ulici) lze projít libovolným směrem, nebo kdy naopak jsou všechny jeho hrany orientované, tj. pro každou hranu je dán směr, kterým musí být projita (všechny ulice jsou jednosměrné). Toto jsou vlastně jediné dva případy okružních úloh, pro které lze efektivně nalézt přesné teoretické optimum. Jsou-li některé hrany neorientované a některé orientované (některé ulice jednosměrné a jiné nikoliv), zůstává úloha obecně NP-těžká.

5 Přehled známých metod pro jednookruhový okružní dopravní problém

Vzhledem k tomu, že pro řešení okružního dopravního problému (ODP) neexistuje žádná efektivní metoda, používají se aproximační neboli heuristické metody. „*Jde o metody, které dávají přípustné řešení s tím, že hodnota účelové funkce nemusí být optimální. Postup heuristické metody je formulován tak, aby účelová funkce dosahovala vysoké (u maximalizace, u minimalizace nízké) hodnoty. U většiny heuristických metod je odhad odchylky dosažené hodnoty účelové funkce od optimální hodnoty účelové funkce vysoký, nicméně praktické výsledky jsou uspokojivé.*

Heuristické metody na rozdíl od exaktních jsou rychlé, polynomiální a nevykazují obtíže i při řešení rozsáhlých úloh. Navíc, protože nejsou exaktně formulované, umožňují flexibilní úpravy pro různé varianty typových úloh, pro specifické podmínky. Spíše než metody bychom je měli nazývat výpočetní postupy, neboť jakákoliv odchylka v algoritmu je také heuristickou metodou.“ [55]

Prakticky ve všech monografiích (např. [2], [28], [46]) bývají aproximační metody rozdělovány následujícím způsobem:

- **metody vytvářející řešení** (vycházejí „z ničeho“, konstruují je od začátku):
 - se **sekvenčním postupem** (postupují lokálně, začnou pracovat v jednom místě, a odtud řešení rozšiřují a přitom si všímají pouze „okolí“ tohoto částečného výsledku),
 - s **paralelním postupem** (postupují globálně, začnou pracovat na více místech najednou a jednotlivé takto získané části řešení časem spojí v jedno),
- **metody řešení zlepšující** (dostanou výchozí řešení buď náhodně vybrané nebo získané některou metodou vytvářející řešení, a to pak vylepšují postupnými iteracemi).

Metody se sekvenčním postupem jsou jednodušší, rychlejší, ale dávají obecně horší řešení než metody s paralelním postupem.

V následujícím přehledu budou metody vytvářející řešení rozlišeny ještě podle dalších kritérií. Metody, u nichž není uveden odkaz na literaturu, byly převzaty podle [46]. Z dalších monografií věnovaných ODP a příbuzným problémům, a to z poslední doby, lze jmenovat [2] a především [28].

Další nejnovější výsledky týkající se ODP (nové metody, metody pro speciální typy úloh, výsledky různých testování aproximačních metod) lze nalézt v [15], [16], [24], [30],

[35], [49], [54], [60], [62], [65]. Některé z nich využívají fyzikálních postupů či postupů analogických fyzikálním procesům [8], [33]. V seznamu literatury jsou doplněny i některé výsledky pro příbuzné problémy ([5], [52], [61]).

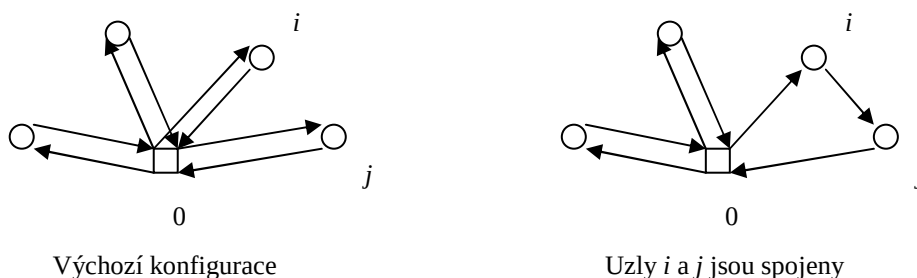
5.1 Metody pro širší třídy distribučních úloh

Na úvod přehledu metod pro ODP bude uvedeno několik takových, které lze použít i pro jiné distribuční úlohy než právě ODP nebo jejichž jsou metody pro řešení jiných distribučních úloh podstatnou součástí. Jejich výhodou je, že jsou dobře použitelné i pro úlohy s nesymetrickou maticí sazeb (jednosměrnými trasami mezi jednotlivými uzly, či určenou orientovaným grafem při použití definice pomocí teorie grafů). Nevýhodou je, že pro ně není znám žádný odhad přesnosti řešení, a to ani pro některou speciální třídu úloh, přestože se přitom většinou jedná o metody s paralelním postupem.

5.1.1 Metoda výhodnostních čísel

Jde o jednu z nejstarších, ale přitom často používaných metod pro okružní úlohy, kterou Clarke a Wright [11] navrhli ve formě použitelné i pro trasovací problémy. Verzi pro ODP studovali např. Frieze, Galbiati a Maffioli [22]. V zahraniční literatuře je tato metoda nazývána „savings method“ (český název je převzat z [53]).

Algoritmus metody je následující: Nejprve se vybere (libovolně) jeden z uzlů, dále bude značen indexem 0. Pro každou dvojici ostatních uzlů i, j se spočte pro přímou trasu mezi nimi (se sazbou c_{ij}) výhodnostní číslo $s_{ij} = c_{i0} + c_{0j} - c_{ij}$. Trasy se seřadí podle výhodnostních čísel od největšího po nejmenší. Postupně se v tomto pořadí zpracovávají a přidávají do řešení (okruhu), pokud mohou s dosud zařazenými tvořit okruh (viz obrázek 1). Takto nakonec vznikne cesta procházející všemi uzly kromě uzlu 0, který již jen zbývá k řešení připojit.



Obrázek 1 Krok metody výhodnostních čísel [46]

Uvedený postup je vhodné provést pro všechny možné volby uzlu 0 a jako řešení vybrat nejlepší takto získané.

5.1.2 Habrovy frekvence

Nevýhodou výhodnostních čísel je, že porovnávají danou hranu pouze s jednou trasou přes jedno místo zvolené pro celý výpočet. Habr (autor např. [31], [32]) zavedl tzv. frekvence, které porovnávají hranu (přímou trasu) mezi dvěma uzly se všemi ostatními hranami, dokonce i s těmi, které s ní přímo nesousedí. Aplikoval je v aproximačních metodách pro různé distribuční problémy. Dokonce vytvořil hned několik takových metod i pro ODP. Habr bývá označován za zakladatele české systémové školy a Habrovy frekvence jsou jedním z ukázkových příkladů aplikace systémového přístupu.

Habrova frekvence hrany (přímé trasy) z místa i do místa j je hodnota $F_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (c_{ij} + c_{kl} - c_{il} - c_{kj})$. Z tohoto vzorce je dobře patrný její význam. Existuje též jiný vzorec, vhodnější pro výpočty, nazývaný modifikovaná frekvence: $F'_{ij} = c_{ij} - r_i - s_j$, kde r_i , resp. s_j značí aritmetický průměr cen v i -tém řádku, resp. j -tém sloupci matice sazeb C . F'_{ij} lze z F_{ij} odvodit lineární transformací.

5.1.3 Patching method

Metoda, kterou navrhl a studoval Karp [39] je založena na spojování cyklů v řešení přiřazovacího problému se stejnou maticí sazeb, jako má řešená instance ODP.

V optimálním řešení přiřazovacího problému se vezmou dva nejdelší cykly. V každém z nich se vybere jeden prvek tak, aby označíme-li jejich sazby c_{ij} a c_{kl} , byla hodnota výrazu $c_{il} + c_{kj} - c_{ij} - c_{kl}$ minimální možná. Záměnou prvků c_{ij} a c_{kl} za c_{il} a c_{kj} vznikne řešení obsahující o jeden cyklus méně. V tomto řešení se opět vyberou dva nejdelší cykly, v nich stejným způsobem dva prvky a provede se výměna. Celý postup se opakuje, dokud se všechny cykly nespojí v jeden, čímž vznikne přípustné řešení ODP.

Je zajímavé, že výzkumu a analýzám právě této metody je v poslední době věnována relativně velká pozornost. ([23], [27], [63]).

5.1.4 Švastova metoda

Jiný postup vycházející z přiřazovacího problému a jeho řešení maďarskou metodou popisuje Švasta [59] (popis maďarské metody viz např. [9]). Na počátku se provede z maďarské metody pouze primární řádková a sloupcová redukce (aby v každém řádku a

každém sloupci byla alespoň jedna nula). Následuje výběr množiny nezávislých nul tak, že je vždy přidána nula, která netvoří s dosud zařazenými cyklus kratší než n (počet uzlů) a v jejímž řádku je co nejméně dalších nul (při stejném počtu u několika potenciálně zařaditelných nul rozhoduje nižší počet nul v jejich sloupci). Vybrané nuly, necht' je jich k , se pokryjí k krycími liniemi dle Königovy věty [41]. Nuly, které nebyly pokryty (protože nebyly předtím vybrány do množiny nezávislých nul) se dočasně nahradí prohibitivními (nevýhodnými) sazbami a provede se krok sekundární redukce. Prohibitivní sazby se zruší (nahradí se zpět nulami) a iterace (počínaje výběrem nezávislých nul) se opakuje, dokud není nalezeno n nezávislých nul tvořících cyklus (okruh).

5.1.5 Metoda ztrát

V zahraniční literatuře bývá tato metoda označována jako „loss method“ a její verze pro klasickou dopravní úlohu bývá nazývána podle jejího tvůrce Vogelova metoda. Webb [66] a Van der Cruyssen a Rijckaert [64] ji modifikovali pro ODP.

Pro každou řadu (tj. všechny řádky i sloupce) matice sazeb se spočtou difference (rozdíly) mezi nejmenší a druhou nejmenší sazbou. V řadě s největší diferencí se vybere nejmenší sazba, necht' je to sazba c_{ij} , a příslušná hrana (z uzlu i do uzlu j) se přidá do řešení. Z dalších úvah se vypustí (definitivně pro celý zbytek výpočtu) i -tý řádek a j -tý sloupec matice sazeb (z nich už žádná další sazba nemůže být vybrána, protože z/do každého uzlu se jede jen jednou) a dále ještě jedna sazba, jejíž hrana by vytvořila s částí řešení obsahující právě přidanou hranou cyklus (kratší než n). V matici bez vypuštěných sazeb se znovu spočtou difference a celý postup se opakuje tak dlouho, dokud je difference z čeho počítat (nakonec v matici zbudou poslední dvě sazby patřící posledním dvěma hranám, které se zařadí do řešení).

5.2 Metody založené na algoritmech teorie grafů

Pro využití v aproximačních metodách jsou z grafových algoritmů nejvýhodnější pro svou rychlost tzv. **hladové algoritmy** (anglicky nazývané „greedy algorithms“). Tyto algoritmy pracují velmi jednoduše. Vezmou si vždy nenasytě to „nejlepší sousto“ (např. hranu s nejvýhodnější sazbou) a definitivně je zpracují („snědí“ – např. buď hranu přidají do okruhu nebo nikoliv) a během dalšího výpočtu už se k němu nevracejí. Takové algoritmy mohou být buď přímo součástí aproximačních metod nebo aproximační metody jsou odpovídající modifikací těchto algoritmů pro ODP.

Mnohé z grafových algoritmů fungují pouze pro neorientované grafy. Proto také z nich odvozené metody pro ODP lze jen obtížně formulovat pro orientovanou verzi ODP (s nesymetrickou maticí sazeb). U následujících metod se tedy předpokládá ODP se symetrickou maticí sazeb (určený neorientovaným grafem), nebude-li řečeno jinak.

I přes jejich jednoduchost se překvapivě (obzvláště v porovnání s metodami uvedenými v předchozí části této práce) podařilo u některých z těchto metod najít odhad jejich chyby pro (symetrický) ODP, který navíc splňuje trojúhelníkovou nerovnost, tj. pro každé tři uzly i, j, k platí $c_{ij} + c_{jk} \geq c_{ik}$. Tento požadavek je z praktického hlediska zcela přirozený, neboť délka přímé trasy mezi dvěma uzly (pravá strana nerovnice) nebude nikdy větší než délka trasy vedoucí přes další jiný uzel (levá strana). Např. o metodě minimální kostry je všeobecně známo, že pro takové úlohy najde vždy řešení, které má nejvýše dvakrát větší hodnotu účelové funkce než (teoretické) optimum a tento výsledek dle [46] ani není spojován s žádným konkrétním autorem. Na druhé straně jsou známy instance ODP, u nichž se chyba této metody k uvedenému odhadu asymptoticky blíží, a tedy nemůže existovat odhad lepší. To samé dokázali Rosenkrantz, Stearns a Lewis [58] pro metodu zatříd'ování a vkládací metody (přitom vkládací metody jsou sekvenčně postupující!). Zároveň ale našli instance s nalezenými řešeními s hodnotou účelové funkce blízkou dvojnásobku optima, které nezlepšila ani aplikace metod zlepšujících řešení (metod výměn), pokud tyto metody nebyly „dostatečně silné“, ale tím pádem už ne příliš efektivní (např. r -opt nepomohl pro $r \leq n/4$).

Nejlepší odhad přesnosti má Christofidova metoda, která dává vždy řešení s hodnotou účelové funkce rovnou nejvýše 1,5-násobku hodnoty teoretického optima (opět pro symetrický ODP s trojúhelníkovou nerovností). Není to už ovšem metoda hladová.

5.2.1 Metoda nejbližšího souseda

Je to nejjednodušší metoda pro ODP, hladová (byť ne založená přímo na teorii grafů), sekvenčně postupující. Zvolí se výchozí uzel a do řešení se jako první zařadí hrana s nejnižší sazbou, která z něj vede. Po ní se „uskuteční přesun“ do jejího koncového uzlu a opět se hledá hrana s nejnižší sazbou vedoucí z tohoto uzlu do některého z dosud nenavštívených uzlů. To se opakuje, dokud se neprojde všemi uzly, a nakonec se zařadí hrana z posledního navštíveného uzlu do výchozího.

Rosenkrantz, Stearns a Lewis [58] zkoumali i tuto metodu a zjistili, že na rozdíl od výše uvedených jimi studovaných metod pro ni neexistuje žádný odhad chyby jejich řešení. Naopak pro požadovaný odhad chyby, tj. požadavek, kolikrát smí hodnota účelové funkce

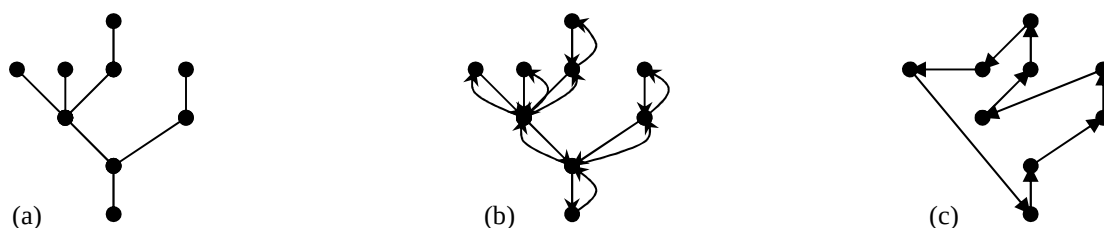
překročit teoretické optimum, byli schopni vždy nalézt instanci ODP, pro kterou jej metoda nejbližšího souseda nedokázala splnit.

Při praktickém řešení je vhodné vyzkoušet volbu každého uzlu jako výchozího a z takto nalezených řešení vybrat to s nejmenší hodnotou účelové funkce.

Metodu je možné použít i pro ODP s nesymetrickou maticí sazeb (orientovanými hranami). Zde lze pro dosažení lepšího výsledku zkusit se pohybovat při hledání řešení i „pozpátku“ (proti směru orientace hran).

5.2.2 Metoda minimální kostry

V (úplném) grafu definujícím instanci ODP se najde (jedním z mnoha existujících algoritmů – [7], [36], [43], [57], ...) minimální kostra (obrázek 2(a)). Každá jeho neorientovaná hrana se nahradí dvojicí navzájem opačných orientovaných hran (obrázek 2(b)). V něm se najde (orientovaný) eulerovský tah, který se pak transformuje na (hamiltonovský) cyklus zachováním pouze prvních výskytů každého uzlu a vynecháním všech ostatních (obrázek 2(c)).



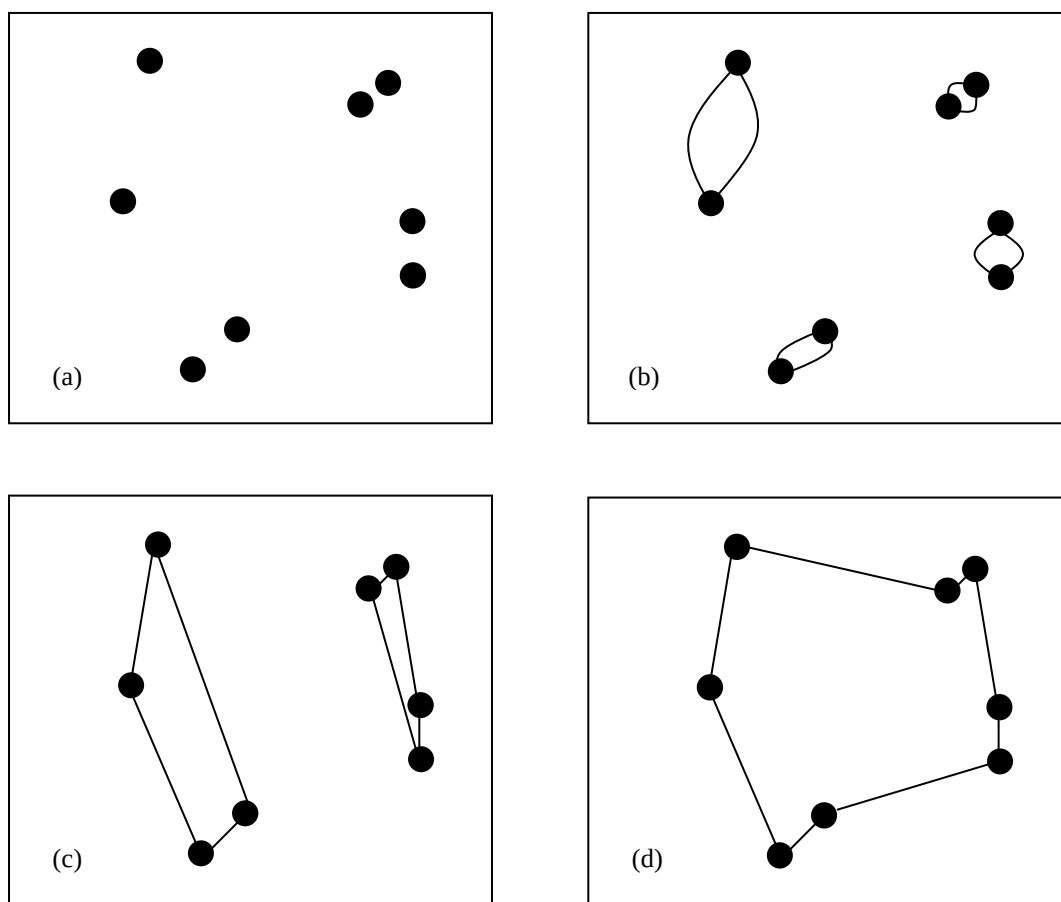
Obrázek 2 Použití minimální kostry k vytvoření trasy [46]

5.2.3 Metoda minimální kostry pro ODP s nesymetrickou maticí sazeb

Metoda se od symetrického případu liší tím, že získaná minimální kostra je orientovaná. Eulerovský graf je proto třeba vytvořit jiným způsobem. Vyřeší se následující dopravní úloha: dodavatelé jsou uzly s vyšším vstupním stupněm než výstupním, spotřebitelé uzly s vyšším výstupním stupněm než vstupním, jejich kapacity, resp. požadavky jsou rozdíly mezi těmito stupni. Za každou přepravovanou jednotku mezi dodavatelem a spotřebitelem se doplní jedna orientovaná hrana. Takto vznikne eulerovský graf (může obsahovat paralelní hrany) a další postup je již stejný jako v případě symetrického ODP.

5.2.4 Metoda zatříd'ování

Český název je převzat z [55], v zahraniční literatuře bývá označována jako „nearest merger method“. Metoda spočívá (podobně jako patching method – viz 5.1.3) ve spojování cyklů. Vychází se ze situace s n cykly, kde každý je tvořen jedním uzlem (sazby $c_{ii} = 0$). V každé iteraci se najdou hrany (sazby) c_{ij} a c_{kl} tak, aby každá byla v jiném cyklu a hodnota výrazu $c_{il} + c_{kj} - c_{ij} - c_{kl}$ minimální možná. Tyto hrany se nahradí hranami c_{il} a c_{kj} , čímž dojde ke spojení dvou cyklů v jeden. To se opakuje, dokud není vše spojeno v jeden cyklus (viz obrázek 3).



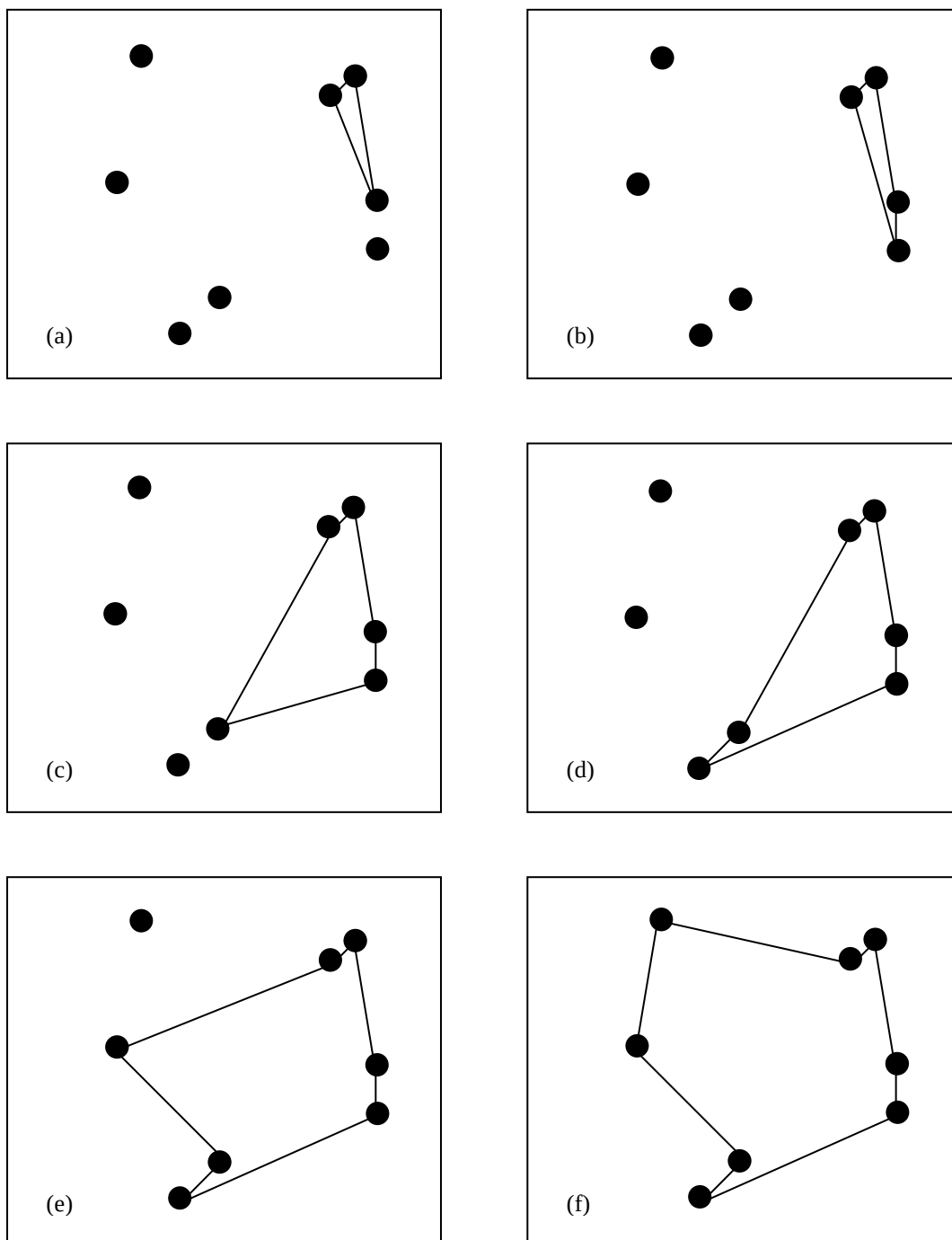
Obrázek 3 Činnost metody zatříd'ování [46]

5.2.5 Vkládací metody

Ve všech těchto metodách se zvolí libovolně jeden uzel jako výchozí pro vytvářený cyklus. Jednotlivé metody se liší ve způsobu, jakým se cyklus rozšiřuje o další uzly.

V **metodě nejbližšího přír'avku** (obrázek 4) se vybere jeden uzel, který už je zařazen do cyklu (označme jej l), a druhý, který dosud není (k) tak, aby sazba c_{kl} byla minimální

možná. Jedna z hran obsahující uzel l se nahradí dvojicí hran obsahující uzly této hrany a uzel k (tj. uzel k se zařadí do cyklu mezi uzly této hrany).



Obrázek 4 Činnost metody nejbližšího přídavku [46]

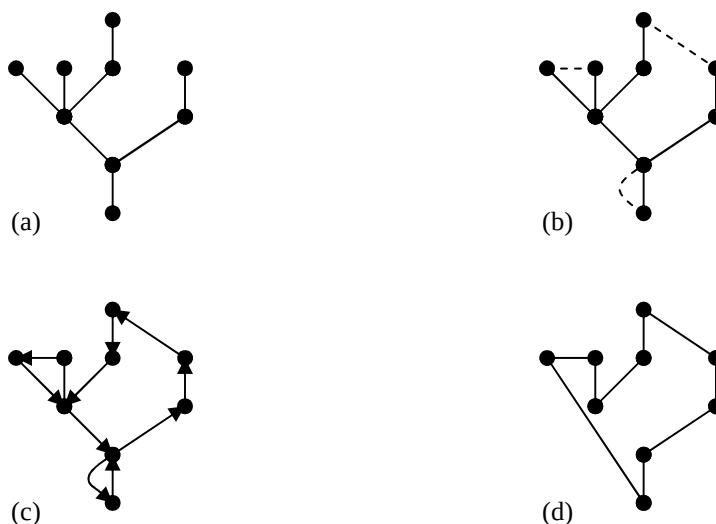
Uzel k , který se přidává, se vybírá stejným způsobem i v **metodě nejbližšího vložení**. Zařadí se ale mezi uzly s indexy i a j (tvořící v původním cyklu hranu) tak, aby hodnota výrazu $c_{ik} + c_{kj} - c_{ij}$ byla minimální možná.

Metoda nejlevnějšího vložení se od předchozích liší tím, že ze všech možných výběrů všech těchto tří uzlů se použije takový, aby hodnota výrazu $c_{ik}+c_{kj}-c_{ij}$ byla minimální možná.

Každou z těchto metod je možno (podobně jako metodu nejbližšího souseda) aplikovat na všechny možné volby výchozího uzlu a jako řešení vybrat nejlepší z takto nalezených.

5.2.6 Christofidova metoda

Christofides [10] zdokonalil metodu minimální kostry vylepšením konstrukce eulerovského grafu. Ten se sestojí tak, že v kostře (obrázek 5(a)) se najde mezi uzly s lichým stupněm minimální perfektní párování a jeho hrany se přidají ke kostře (obrázek 5(b)). Zbývající část postupu je stejná jako u metody minimální kostry (obrázek 5(c) a 5(d)).



Obrázek 5 Činnost Christofidova algoritmu [46]

Christofidova metoda vždy nalezne řešení s hodnotou účelové funkce nejvýše 1,5-krát vyšší než má teoretické optimum.

Cornuéjols a Nemhauser [13] ukázali, že tento odhad nelze zlepšit. Předložili instance, u nichž se výsledek metody tomuto odhadu asymptoticky blíží.

Při převodu eulerovského tahu na hamiltonovský cyklus v Christofidově metodě (případně i v metodě minimální kostry) je možné zachovat i jiný než právě první výskyt uzlu v eulerovském tahu. Zachováním různých výskytů mohou vzniknout různé výsledné okruhy a naskytá se myšlenka vylepšit Christofidovu metodu ještě optimálním výběrem zachovaných

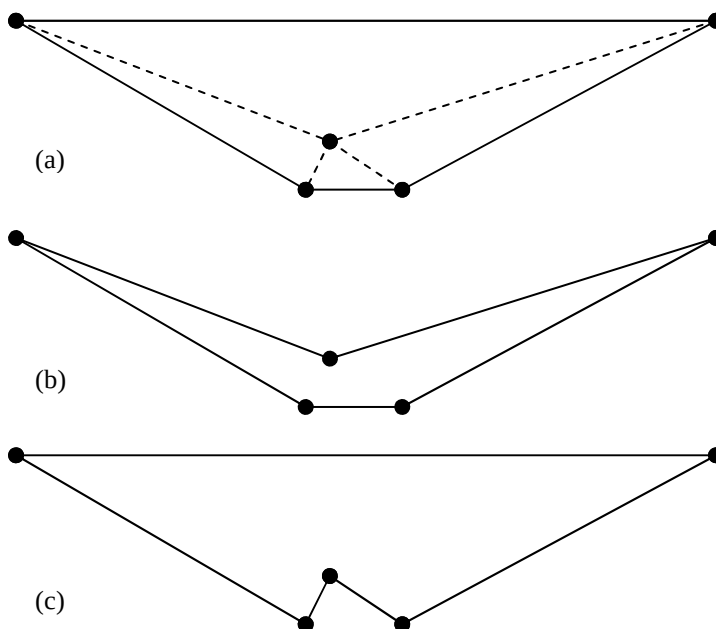
výskytů. Bohužel, Papadimitriou a Vazirani [53] dokázali, že pro úlohu nalézt nejlepší způsob tohoto převodu neexistuje polynomiální algoritmus (tj. úloha je alespoň NP-úplná).

5.3 Metody pro Euklidovský ODP

Uzly (obsluhovaná místa) v této verzi ODP jsou body v rovině a sazby euklidovské vzdálenosti (přímé, „vzdušnou čarou“) mezi nimi. Jedná se tedy o speciální případ symetrického ODP splňujícího trojúhelníkovou nerovnost, a tak i pro něj platí všechny odhady přesnosti uvedené u předchozích metod. Protože se však praktické příklady často dosti blíží euklidovskému ODP, je pochopitelná a opodstatněná snaha o vytvoření speciálních algoritmů pro tento typ ODP s ještě lepšími vlastnostmi.

5.3.1 Metody konvexního obalu

Jedním ze způsobů, jak vylepšit a zjednodušit vkládací metody pro euklidovský ODP je vyjít z cyklu určeného mnohoúhelníkem, jehož vrcholy tvoří konvexní obal množiny všech uzlů zadané úlohy. Do tohoto okruhu se postupně podle určitého pravidla vkládají další uzly, až vznikne cyklus obsahující všechny. Necht' k značí přidávaný uzel a necht' j je zařazován mezi uzly i a j .



Obrázek 6 Porovnání vkládacích kritérií v metodě konvexního obalu: (a) výchozí řešení s možnými vloženími, (b) vložení podle největšího úhlu, (c) nejlevnější vložení [46]

„Klasická“ **metoda konvexního obalu**, vybírá uzly i, j, k tak, aby hodnota výrazu $c_{ik} + c_{kj} - c_{ij}$ (nárůst délky cyklu, tj. obvodu mnohoúhelníka) byl minimální možný, tedy stejně

jako metoda nejlevnějšího vložení. Pokud je více takových minimálních možností, rozhoduje hodnota $(c_{ik}+c_{kj})/c_{ij}$.

Norback a Love [50] v **metodě největšího úhlu** vybírají nově zařazený uzel tak, aby úhel, který svírají hrany $\{i, k\}$ a $\{k, j\}$ byl maximální.

Or ve své disertační práci [51] doporučuje vkládat takový uzel, aby byla minimální hodnota výrazu $(c_{ik}+c_{kj}-c_{ij})(c_{ik}+c_{kj})/c_{ij}$ (**metoda „podíl krát rozdíl“**).

Ani jedna z těchto metod ovšem nepřináší zlepšení odhadu chyby výpočtu.

Metoda největšího úhlu a „klasická“ verze používající nejlevnější vložení jsou znázorněny na obrázku 6.

5.3.2 Arorova metoda

Arora [4] objevil polynomiální metodu, která vyřeší euklidovský ODP s libovolnou požadovanou přesností (vyjádřenou násobkem hodnoty teoretického optima). Na požadované přesnosti ovšem závisí stupeň polynomu charakterizujícího časovou složitost metody: čím vyšší přesnost, tím vyšší stupeň. Takové aproximační metody se vyskytují i u jiných NP-těžkých úloh a bývají označovány jako polynomiální aproximační schémata (polynomial time approximation schemes) a označovány zkratkou PTAS. V případě požadavku na vysokou přesnost je ovšem stupeň polynomu rovněž vysoký, a tak pro řešení velmi rozsáhlých úloh s vysokou požadovanou přesností nemusí být PTAS použitelný.

Přesnější popis Arorovy metody je složitý a nebude zde uveden. Metoda totiž pracuje rekurzivně (její procedura opakovaně volá sama sebe). Navíc používá tzv. Steinerovy stromy a jako dílčí úlohy řeší některé problémy, které se jich týkají (viz [26], [17], [67], [6], [40]). To by vyžadovalo zavedení dalšího rozsáhlého pojmového aparátu.

Stručně se postup Arorovy metody dá charakterizovat následujícím způsobem: Ve čtverci, kde se nacházejí všechny uzly řešené úlohy, se sestojí čtvercová mřížka. Hustota mřížky závisí na požadované přesnosti řešení. V každém jejím čtverečku se přesně vyřeší dílčí úloha. Potom se vždy ve čtveřici políček řešení spojí a získá se tak soubor dílčích řešení v mřížce s políčky o dvakrát delší straně, tj. se čtyřikrát menším jejich počtem. Postupným opakováním této procedury zmenšující počet polí mřížky se nakonec dostane řešení v jediném (výchozím) čtverci – hledané řešení ODP.

Arorova metoda byla průlomovou mezi metodami pro ODP, protože to byl historicky první PTAS pro řešení některého typu ODP. V poslední době se pro euklidovský ODP objevují i další metody, viz např. [1].

5.4 Metody zlepšující řešení

Tyto metody označované někdy též jako metody výměn, jsou založeny na myšlence nahradit několik hran cyklu (okruhu) stejným počtem jiných hran tak, aby opět vznikl okruh, ale s nižší hodnotou účelové funkce. Tento postup se iteruje, dokud je metoda schopna nějakou takovou výměnu provést. Jednotlivé metody se od sebe navzájem liší způsobem, jakým hrany k výměně vybírají. Jako první přišel s touto myšlenkou už koncem 50. let Croes [14].

Metody výměn jsou, stejně jako metody teorie grafů, lépe použitelné pro ODP se symetrickou maticí sazeb. Je to způsobeno tím, že ve většině případů se v okruhu vzniklém po výměně hran prochází jeho část v opačném směru než v původním cyklu. Proto se i u následujících metod, pokud nebude uvedeno jinak, bude předpokládat symetrický ODP.

Na první pohled se zdá, že v možnostech výměn hran se skrývá obrovský potenciál a že metody zlepšující řešení by měly dávat ty nejlepší výsledky. Lin-Kernighanova metoda bývá skutečně považována za nejlepší metodu pro ODP vůbec. Přesto pro žádnou z těchto metod není znám odhad přesnosti podobný jako např. pro Christofidovu metodu, i když je na ni neustále soustředěna pozornost badatelů (z poslední doby např. [3], [34]).

5.4.1 r -opt

Takto nazval Lin [47] metodu, při níž se v každé iteraci provede taková výměna r hran, aby došlo k co největšímu poklesu hodnoty účelové funkce (viz obrázek 7 pro $r = 3$). Počet možností výběru hran, který je třeba testovat při hledání té nejvýhodnější, se ovšem s rostoucím r velmi rychle zvyšuje. Pro $r = 3$ a vyšší dokonce existuje pro každou volbu hran, které mají být z okruhu odstraněny, několik možností výběru hran, kterými budou nahrazeny. Proto je tato metoda v praxi použitelná pouze s $r = 2$ nebo $r = 3$.



Obrázek 7 Ukázka metody 3-opt: (a) aktuální trasa, (b) trasa po výměně [46]

5.4.2 Or-opt

Pod tímto pojmenováním je známa další z metod, kterou Or navrhl ve své disertační práci [51]. V metodě 3-opt je omezen výběr trojic hran k vyřazení pouze na takové, že mezi alespoň jednou dvojicí z nich jsou v cyklu nejvýše 3 uzly (tj. další 2 hrany – viz obrázek 8). Tím se výpočet zjednoduší (urychlí) a jak Or ukázal, metoda dává téměř stejně dobré výsledky jako „klasický“ 3-opt.



Obrázek 8 Ukázka metody Or-opt: (a) aktuální trasa, (b) trasa po výměně [46]

5.4.3 Lin-Kernighanova metoda

Lin a Kernighan [48] přišli s nápadem, že metoda výměn by si sama v každém kroku dynamicky určovala, kolik hran zaměnit (tj. vybírala by mezi výměnami s různým počtem hran). Toho se docílí tím, že v rámci (uvnitř) každé iterace se dalším iterativním postupem vybírají hrany pro záměnu jedna po druhé, navíc pro všechny volby výchozího uzlu l a výchozí hrany $\{l, k\}$, a to následujícím způsobem.

Vybere se uzel i tak, aby hodnota $c_{lk} - c_{ki}$ byla kladná (jinak nemá smysl tuto hranu vůbec nahrazovat jinou) a maximální možná. Hrana $\{l, k\}$ se nahradí hranou $\{k, i\}$, čímž vznikne trasa (nikoliv okružní), která vychází z uzlu l , prochází každým uzlem právě jednou a nakonec se vrací do uzlu i , který leží „někde uprostřed“ předchozí cesty. Takovýto typ trasy bývá někdy nazýván pro svůj tvar δ -cesta. S uzlem i sousedí v cyklu (kratším než n), který je součástí δ -cesty, kromě uzlu k ještě jeden uzel j , přičemž nahrazením hrany $\{i, j\}$ hranou $\{j, l\}$ vznikne okruh (přípustné řešení ODP). Pokud má tento okruh nižší hodnotu účelové funkce než původní (před výměnou hran $\{l, k\}$ a $\{i, j\}$ za $\{i, k\}$ a $\{j, l\}$), vyhledávání dalších hran k výměně pro výchozí hranu $\{l, k\}$ už se neprovádí.

V opačném případě se na počátku každé další iterace ocitáme v situaci, kdy byla vytvořena δ -cesta. Nyní se najde uzel m tak, aby hodnota $c_{ij} - c_{jm}$ byla maximální možná a hrana $\{i, j\}$ se nahradí hranou $\{j, m\}$. Je-li $m = l$, vzniká okruh a v hledání dalších hran (pro výchozí hranu $\{l, k\}$) už se nepokračuje. V opačném případě vzniká opět (jiná) δ -cesta. Ve vyhledávání dalších hran už se nepokračuje ani v případech, kdy cyklus v δ -cestě je tvořen

pouze dvěma hranami (tj. neexistuje „nový“ uzel j pro další iteraci) nebo když hodnota účelové funkce pro δ -cestu je vyšší než pro původní okruh.

Hrany pro výměnu se vybírají mezi možnostmi určenými všemi okruhy i δ -cestami nalezenými v průběhu výpočtu pro každou volbu výchozí hrany $\{l, k\}$ (tedy *nejen* mezi δ -cestami získanými až v poslední iteraci pro danou výchozí hranu). δ -cesta se převede na okruh nahrazení hrany $\{i, j\}$ hranou $\{i, l\}$. Z těchto výměn se realizuje taková, která přinese co největší snížení hodnoty účelové funkce (pokud žádná taková není, výpočet končí).

5.4.4 Metody výměn pro ODP s nesymetrickou maticí sazeb

Pro nesymetrický ODP, jak již bylo řečeno, je účinnost metod zlepšujících řešení ve srovnání se symetrickým případem značně omezená. Lze využívat jen takové záměny hran, které nevynucují změnu směru průchodu částí okruhu. V případě výměn dvou hran je vždy nutno právě jednu ze dvou částí určenou touto dvojicí hran projít v opačném směru než v původním okruhu. 2-opt je proto pro nesymetrický ODP zcela nepoužitelný. Pro vyšší hodnoty r možné výměny existují, ale jejich počet je nižší, což ovšem může naopak výpočet urychlit a zjednodušit.

Zbývá ještě poznámka k Lin-Kernighanově metodě. Tak, jak byla originálně formulována, ji pro nesymetrický ODP použít nelze, protože je opět některé úseky třeba po výměně procházet opačným směrem než před ní. Kanellakis a Papadimitriou [37] ovšem dokázali Lin-Kernighanovu metodu pro nesymetrický ODP modifikovat.

6 Přehled známých metod pro vybrané typy víceokruhových úloh

6.1 Metody pro víceokruhový okružní dopravní problém kapacitně omezený

Kapacitně omezená verze je asi nejjednodušší, nejtypičtější a nejčastěji řešeným typem trasovacího problému. Často je a i v této práci bude pod označením víceokruhový okružní dopravní problém (VODP) míněna právě tato verze. Centrální uzel (stanoviště), odkud/kam se provádí rozvoz/svoz, je jeden, z něho je třeba vést okružní trasy do ostatních uzlů, z nichž každý má danou kapacitu (požadavek) tak, aby každý ležel na právě jedné z nich a pro každou trasu součet kapacit uzlů nepřekročil danou kapacitu vozidla (pro všechna vozidla stejnou). Celková ujetá vzdálenost má být minimální.

6.1.1 Mayerova metoda

Metoda pouze rozdělí uzly do skupin, z nichž každá bude tvořit jeden okruh, neřeší tedy úlohu úplně. Místa ve skupině je potom ještě třeba seřadit do okruhu některou z metod pro ODP.

Skupiny jsou vytvářeny jedna po druhé sekvenčním postupem. Jako první do nové skupiny je vybrán nejvzdálenější uzel z dosud nezařazených. Jako další je vždy přidáván nejbližší uzel k některému z těch, které již ve skupině jsou, tj. metoda pracuje podobně jako Jarníkův [36] či Primův [57] algoritmus pro minimální kostru. Skupina je kompletní, pokud přidáním dalšího uzlu by suma kapacit jejích uzlů překročila kapacitu vozidla.

6.1.2 Bin packing problem a Fernandez de la Vega - Luekerova metoda

Jestliže se nepřihlíží ke vzdálenostem, představuje úloha, kterou řeší Mayerova metoda, tj. rozdělení uzlů do skupin tak, aby suma kapacit v žádné z nich nepřekročila kapacitu vozidla, tzv. bin packing problem. Jde o to rozmístit n „věcí“ s danými vahami do co nejmenšího počtu „nádob“ (bins) majících všechny stejnou nosnost. Formální definice problému je uvedena např. v [42]. V případě VODP jsou těmito „věcmi“ jednotlivé uzly, vahami jejich kapacity a „nádobami“ vozidla (okruhy).

Fernandez de la Vega a Lueker [20] našli PTAS (polynomial time approximation schemes – viz 5.3.2) pro řešení tohoto problému. Váhy se rozdělí na velké a malé, přičemž na tom, jak je stanovena hranice mezi těmito dvěma skupinami závisí požadovaná přesnost

řešení. „Věci“ s velkými kapacitami jsou do „nádob“ rozmístěny optimálně, ty malé potom metodou „first fit“.

6.2 Metody pro časově omezený rozvozní problém

Definice časově omezeného rozvozního problému (ČORP) je následující: „Mějme n měst spojených silniční sítí s maticí nejkratších vzdáleností C mezi těmito městy. Předpokládejme, že město 1 je místem svozu (resp. rozvozu) ze zbývajících $n-1$ měst. Dále je stanoveno, že z každého města musí být zásilka svezena v časové intervalu $(0, T)$, což vylučuje svoz jedním hamiltonovským cyklem. Řešení tedy bude tvořit více tras – okruhů.

Můžeme předpokládat, že všechny trasy začínají místem 1, doba svozu se ale počítá až od doby odjezdu z prvního místa na trase (kromě místa 1). Tedy doba jízdy z místa 1 do tohoto místa se do doby T nezapočítává. Pro sestavení modelu a výpočet optimálního řešení bychom tedy potřebovali doby jízdy mezi jednotlivými místy, pro jednoduchost předpokládejme, že je lze odvodit z průměrné rychlosti jízdy a kilometrové vzdálenosti dané maticí C . Odtud vyplývá, že místo časového omezení doby svozu můžeme stanovit maximální délku trasy svozu do centra 1. Označme tuto délku symbolem L .“ [56]

Následují modifikace některých metod pro ODP vhodné pro řešení ČORP. Poznamenejme, že všechny jsou sekvenčně postupující.

„V navržených úpravách heuristických metod budeme využívat následující označení.

Označme $M \subset \{2, 3, \dots, n\}$ množinu měst, která ještě nebyla zařazena do žádné z tras, na začátku metody bude množina M rovna $\{2, 3, \dots, n\}$. Heuristická metoda končí, pokud množina M je prázdná. Průběh trasy bude uložen ve vektoru $tr = (tr(1), tr(2), \dots, tr(s))$, kde $tr(1) = tr(s) = 1$. Pro každou uvažovanou změnu (rozšíření) trasy a tedy vektoru tr budeme testovat omezení ve tvaru:

$$P1: \sum_{i=1}^{s-2} c_{tr(i)tr(i+1)} \leq L, \text{ resp.}$$

$$P2: \sum_{i=2}^{s-1} c_{tr(i)tr(i+1)} \leq L.$$

Pokud platí podmínka $P1$, je úloha přípustná v případě rozvozů, (v případě svozů musíme pořadí měst ve vektoru tr obrátit), pokud platí $P2$, pak je změna přípustná pro svoz, pro rozvoz je nutno tr obrátit.“ [56]

6.2.1 Metoda nejbližšího souseda

„U metody nejbližšího souseda provádějme následující kroky tak dlouho, dokud množina M není prázdná:

Krok 1: Pokud množina M je jednoprvková, obsahující pouze místo k , pak položíme $tr(1) = 1$, $tr(2) = k$, $tr(3) = 1$ a výpočet tras končí. Jinak označíme k místo s nejkratší vzdáleností c_{1i} a vytvoříme trasu $tr(1) = 1$, $tr(2) = k$, $tr(3) = 1$, položíme $s = 3$. Místo k odstraníme z množiny M .

Krok 2: Hledejme místo k , které minimalizuje vzdálenost $c_{tr(s-1),k}$ a splňuje:

- patří do množiny M ,
- pro rozšíření trasy tr o místo k vložením tohoto místa za místo $tr(s-1)$ tato trasa splňuje podmínku $P1$, resp. $P2$.

Pokud neexistuje takové místo k , pak trasa je ukončena a pokračujeme tvorbou nové trasy krokem 1.

Krok 3: Rozšíříme trasu tr o místo k vložením tohoto místa za místo $tr(s-1)$, zvýšíme s o 1 a místo k odstraníme z množiny M . Pokud je M neprázdná, pokračujeme krokem 2, jinak metoda končí.“ [56]

6.2.2 Metoda vkládací

„Rovněž u této metody provádíme následující kroky, pokud M je neprázdná.

Krok 1: Označíme k místo s nejkratší vzdáleností c_{1i} a vytvoříme trasu $tr(1) = 1$, $tr(2) = k$, $tr(3) = 1$, položíme $s = 3$. Místo k odstraníme z množiny M . Pokud je M prázdná, výpočet končí.

Krok 2: Hledejme místo k z množiny M , které splňuje

- minimalizuje číslo $d = c_{tr(i),k} + c_{k,tr(i+1)} - c_{tr(i),tr(i+1)}$ pro všechna $i = 1, 2, \dots, s-1$ a $k \in M$,
- pro rozšíření trasy tr o místo k vložením tohoto místa mezi místo $tr(i)$ a $tr(i+1)$, kde i minimalizuje hodnotu d , tato trasa splňuje podmínku $P1$, resp. $P2$.

Pokud neexistuje takové místo k , pak trasa je ukončena a pokračujeme tvorbou nové trasy krokem 1.

Krok 3: Rozšíříme trasu tr o místo k vložením tohoto místa mezi místo $tr(i)$ a $tr(i+1)$, kde i minimalizuje hodnotu d , zvýšíme s o 1 a místo k odstraníme z množiny M . Pokud je M neprázdná, výpočet končí, jinak pokračujeme krokem 2.“ [56]

6.2.3 Metoda výhodnostních čísel

„Následující postup opakujeme, dokud M není prázdná.

Krok 1: Pokud množina M obsahuje jediné místo k , pak vytvoříme trasu $tr(1) = 1$, $tr(2) = k$, $tr(3) = 1$, položíme $s = 3$. Místo k odstraníme z množiny M a metoda pak končí.

Krok 2: Hledejme dvojici míst, z M ve tvaru (k, l) , které splňují podmínku $c_{1k} + c_{kl} \leq L$ maximalizuje výhodnostní čísla $s_{ij} = c_{1i} + c_{li} - c_{ij}$. Pokud taková dvojice (k, l) neexistuje, pak pro všechna místa z M vytvoříme jednoduché trasy ve tvaru $(1, k, 1)$ a metodu ukončíme.

Krok 3: Vytvoříme trasu $tr(1) = 1$, $tr(2) = k$, $tr(3) = l$, $tr(4) = 1$, položíme $s = 4$.

Krok 4: Hledejme i z M , které maximalizuje s_{ik} , resp. j z M , které maximalizuje s_{ij} takové, že vložením i do trasy před místo k trasa splňuje P1 nebo P2, a j , které maximalizuje s_{ij} a vložením j do trasy za místo l splňuje P1 nebo P2. Pokud ani i ani j neexistuje, pak trasa končí a pokračujeme krokem 1.

Krok 5: Pokud $s_{ik} \geq s_{ij}$ (nebo j neexistuje), pak vložíme i do trasy před místo k a místo i vyloučíme z M . Zvýšíme s o 1 a za k položíme i . Pokud $s_{ik} < s_{ij}$ (nebo i neexistuje), pak vložíme j do trasy za místo l a místo j vyloučíme z M . Zvýšíme s o 1 a za l položíme j . Pokračujeme krokem 4.“ [56]

7 Víceokruhový časově omezený rozvozní problém

Důvody, proč nelze určitou přepravu realizovat jedním okruhem, mohou být v zásadě dvojího typu: buďto časové nebo kapacitní. Zaměřme se nejprve na omezení časová. Za nejjednodušší lze považovat případ, kdy je potřeba provést rozvoz nebo svoz do určitého termínu (a ujet přitom celkově co nejkratší vzdálenost), tedy časově omezený rozvozní problém (ČORP). Máme tedy dáno jedno centrální místo, určitý počet dalších míst a časový limit, během kterého se musíme do všech těchto ostatních míst dostat.

S touto úlohou se lze setkat v praxi velmi často. Příkladem může být např. rozvoz novin z tiskárny do prodejen nebo potravinářských výrobků či polotovarů z výroby do restaurací nebo obchodů. Uzávěrka novin je pozdě v noci, aby čtenáři měli zprávy co nejčerstvější, a noviny musí dostat zákazníci včas, takže disponibilní čas pro jejich rozvoz je relativně krátký. Také potravinářské produkty je třeba rozvézt, dokud jsou čerstvé. Příklady uvedené v [56], na kterých byly metody pro tuto úlohu testovány, byly prezentovány jako svozy denních zpráv z poboček firmy do její centrály. Jistě lze najít mnoho dalších situací, kdy je třeba rozvézt něco, co rychle podléhá zkáze nebo zastarává, v co nejkratším čase. Přitom už není tak důležité, jak se vozidla provádějící rozvoz dostanou zpět do centra rozvozu. Jedná se tedy o úlohu v praxi opravdu často řešenou a proto se právě jí tato práce zabývá.

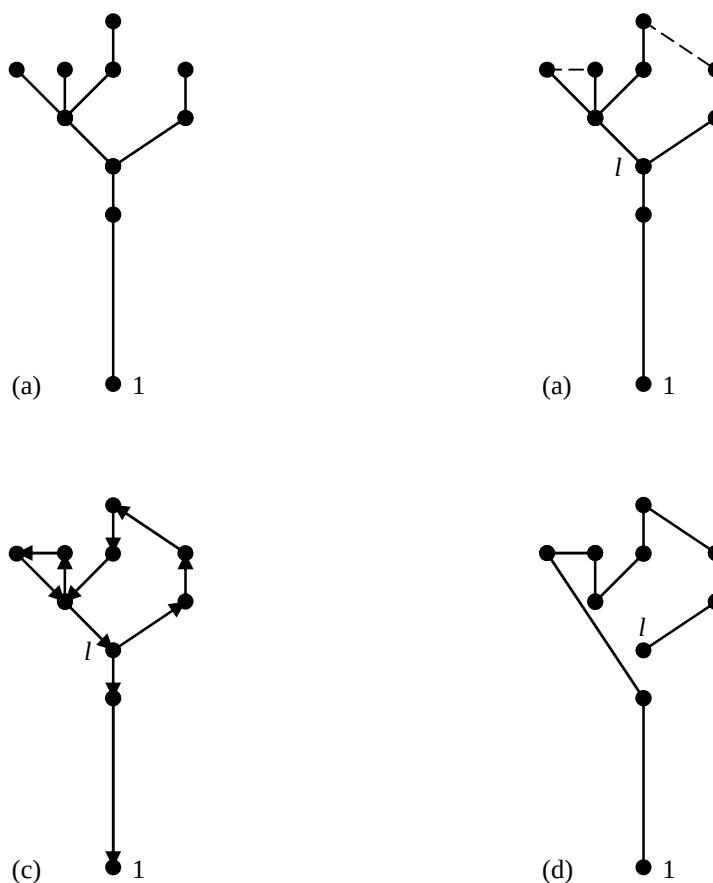
7.1 Další metody pro víceokruhový časově omezený rozvozní problém

Přesná definice ČORP je uvedena v kapitole 6.2, kde je zavedeno i značení, které bude používáno v této kapitole, a dále jsou tam uvedeny některé metody pro jeho řešení. Nyní následuje několik dalších nově navržených metod. Vzhledem k tomu, že délka první (resp. poslední) hrany jednotlivých tras se do jejich celkové délky (času) nezapočítává, budeme na tyto trasy při popisu těchto metod pohlížet jako na cesty (nikoliv jako na cykly).

7.1.1 Metoda stromů

První navržená metoda (viz též [71], [76]) je kombinací Mayerovy metody pro VODP (6.1.1) a Christofidovy metody pro ODP (5.2.6). Využívá toho, že při vytváření skupin míst pro jednotlivé trasy (vozidla) Mayerova metoda zároveň sestrojí pro každou z těchto skupin minimální kostru grafu určeného těmito místy. Christofidova metoda, modifikovaná tak, aby

namísto cyklické trasy konstruovala cestu, může při své práci z této kostry vycházet. Přesný popis metody stromů je následující:



Obrázek 9 Činnost metody stromů v průběhu jedné iterace

Krok 1: Z množiny M (míst, která dosud nebyla zařazena do žádné z tras), vybereme takové místo i , aby c_{1i} (index 1 označuje centrální místo rozvozu či svozu) byla maximální možná (tj. nejvzdálenější místo od centrálního), jako první do sestavované cesty (skupiny). Označíme T graf obsahující jako jediný uzel místo i .

Krok 2: Označme P množinu všech necentrálních míst dosud zařazených do právě vytvářené cesty. Je-li $M = \emptyset$, potom algoritmus končí, jinak najdeme minimální c_{ij} takové, že $i \in P$ a zároveň $j \notin M$.

Krok 3: Místo j a hranu $\{i, j\}$ přidáme do T . Z T vytvoříme T_1 přidáním uzlu 1 a hrany $\{1, k\}$ takové, že $k \in P \cup \{j\}$, k je uzel stupně 1 v T a c_{1k} je minimální možné. (Poznamenejme, že T i T_1 jsou stromy, T_1 je znázorněn na obrázku 9(a)).

Krok 4: Najdeme minimální „skoro perfektní“ párování U všech míst v T , která mají v T_1 lichý stupeň. Počet těchto míst je zřejmě lichý, proto právě jedno z nich zůstane v párování izolované. Označme je l .

Krok 5: V $T \cup U$ (obrázek 9(b)) jsou právě dva uzly lichého stupně: l a 1 . Najdeme tah z l do 1 obsahující všechny hrany $T \cup U$ (obrázek 9(c)).

Krok 6: Z tohoto tahu vytvoříme cestu zachováním prvních výskytů všech míst a vynecháním všech ostatních výskytů (obrázek 9(d)).

Krok 7: Jestliže celková délka této cesty není delší než limit L , budeme právě vzniklou cestu považovat za mezivýsledek a pokračujeme v její konstrukci návratem ke kroku 2. V opačném případě budeme cestu získanou *před* posledním provedením kroků 2 až 6 považovat za hotovou a vrátíme se na krok 1, abychom sestrojili další cestu.

Metoda stromů postupuje sekvenčně, což je její relativní nevýhodou. Předností by naopak mělo být, že využívá Christofidovu metodu, která je nejpřesnější známou metodou pro neeuklidovský ODP.

7.1.2 Paralelně postupující verze metody výhodnostních čísel

Další myšlenka, jak získat metodu, která dává dobrá řešení, je zakomponovat do metody výhodnostních čísel (6.2.3) paralelní postup, tj. modifikovat je tak, aby všechny trasy byly konstruovány zároveň:

Krok 1: Pro všechny hrany, které neincidují s centrálním uzlem 1 , spočteme jejich výhodnostní čísla. Všechny tyto hrany seřadíme podle výhodnostních čísel od nejvýhodnější (s nejvyšším výhodnostním číslem) po nejméně výhodnou (s nejnižším výhodnostním číslem).

Krok 2: Zpracováváme hrany (neincidující s centrálním uzlem) v pořadí určeném v kroku 1: Pokud po přidání hrany k dosud přidaným tyto tvoří množinu vrcholově disjunktních cest a délka žádné z nich po jejím připojení k centrálnímu uzlu 1 nepřekračuje limit L , přidáme ji k řešení. Toto opakujeme, dokud všechna necentrální místa neleží na některé z cest.

Krok 3: Ke všem cestám připojíme centrální uzel 1 za jejich bližší koncový uzel.

Výpočet touto metodou lze urychlit (byť za cenu určitého zhoršení výsledků) tím, že jakmile dojde u některé cesty přidáním hrany k překročení limitu L , budeme si tuto cestu pamatovat a v dalším průběhu výpočtu už nebudeme další hrany na ni navazující testovat a připojovat. Lze totiž předpokládat, že hrany s horším výhodnostním číslem budou většinou po svém přidání dávat horší cesty. Tuto modifikaci budeme nazývat **limitovaná metoda výhodnostních čísel**, zatímco postup uvedený jako první v této podkapitole nazveme **nelimitovaná metoda výhodnostních čísel**. Tyto verze jsou popsány rovněž v [71] a [76]

(jsou zde porovnávány s předchozí metodou stromů). Postup z [56] uvedený v 6.2.3 bude označován jako **sekvenční metoda výhodnostních čísel**.

7.1.3 Aplikace Habrových frekvencí

Stejným způsobem jako výhodnostní čísla v předchozí metodě se dají použít Habrovy frekvence (5.1.2), viz [68]. Ty uvažují všechny hrany se stejnou důležitostí. V případě ČORP jsou však hrany incidující s centrálním uzlem důležitější než ostatní, jsou totiž využívány častěji, protože v každém řešení se jich vyskytuje více, zatímco s ostatními uzly incidují jen dvě nebo dokonce jedna hrana v daném řešení. Ukažme, o kolik jsou tyto hrany významnější za předpokladu, že výsledné řešení bude mít p cest (bude využito p vozidel), n bude v této kapitole značit pro zjednodušení vzorců počet necentrálních míst. V náhodně vybraném řešení s p cestami (s rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti a bez ohledu na sazby) je pravděpodobnost, že bude vybrána hrana, která neinciduje s centrálním uzlem, $\frac{2(n-p)}{n(n-1)}$, zatímco hrana incidentní s centrálním uzlem je vybrána s pravděpodobností p/n . Hrany incidentní s centrálním místem se tedy objevují v řešení s $\frac{p(n-1)}{2(n-p)}$ -krát větší pravděpodobností než ostatní, tj. jsou $\frac{p(n-1)}{2(n-p)}$ -krát důležitější. Proto se tyto hrany budou objevovat ve vzorci pro výpočet Habrových frekvencí s $\frac{p(n-1)}{2(n-p)}$ -krát větší vahou, tj. tento vzorec bude mít tvar:

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (c_{ij} + c_{kl} - c_{il} - c_{kj}) + \frac{p(n-1)}{2(n-p)} \sum_{m=1}^n (2c_{ij} + c_{m0} - c_{i0} - c_{mj} + c_{0m} - c_{im} - c_{0i}).$$

Algoritmus bude tedy probíhat takto:

Krok 1: Pro všechny hrany, které neincidují s centrálním uzlem 1, spočteme jejich Habrovy frekvence právě popsaným způsobem. Všechny tyto hrany seřadíme podle frekvencí od nejvýhodnější (s nejnižší frekvencí) po nejméně výhodnou (s nejvyšší frekvencí).

Kroky 2 a 3 jsou potom aplikovány zcela stejným způsobem jako v předchozí metodě 7.1.2.

7.2 Typy úloh pro testování

Před testováním metod je třeba dobře rozmyslet, jaké příklady k tomu nejlépe použít. Nejprve uvažme, jaký vliv na obtížnost řešení má hustota komunikační sítě. Pokud je

komunikační síť řídka, často se stává, že nejkratší trasa mezi dvěma místy vede přes jedno či více dalších míst, a dobrých řešení tak není mnoho. Někdy (pokud se některým místem projíždí ve skutečnosti vícekrát) dokonce dvě různá řešení, co se týče pořadí obslužených míst, mohou představovat stejnou trasu, liší se pouze tím, v jakém pořadí se zastávky vozidla v jednotlivých místech uskuteční (při kterém průjezdu se vozidlo v případě vícenásobného průjezdu v místě zastaví). Naopak v případě, kdy mezi jednotlivými místy je velmi kvalitní, hustá komunikační síť, a nabízí se tak větší množství dobrých, nadějných řešení, je zjevně obtížnější vybrat co nejlepší řešení a prověření testovaných metod bude důkladnější. V tomto smyslu ideálním a nejobtížnějším případem by byla situace, kdyby mezi každými dvěma místy vedla přímá trasa, což je případ euklidovské úlohy (ve smyslu definice 3.4.3). Proto budou metody testovány (a to nejen pro ČORP, ale i pro VODP v příští kapitole) na euklidovských úlohách a další úvahy se zaměří pouze na ně.

Důležité je porovnat limit pro délku tras L s velikostí oblasti, na které rozvoz či svoz probíhá. Bude-li vzdálenost nejvzdálenějších míst od centrálního jen o málo menší než L , může se snadno stát, že vozidlo, které do takového místa pojede, nebude už mít čas navštívit některé další místo, a tak v případě těchto vzdálených míst vlastně nebude co řešit (velikost úlohy, kde se skutečně bude něco řešit, se o taková místa zmenší, ta budou v testovací úloze zbytečná). Bude-li naopak vzdálenost všech míst od centrálního mnohem menší než L , může na jejich objetí v daném časovém limitu stačit jediné vozidlo (půjde tedy o úlohu nalézt hamiltonovskou cestu, která je ekvivalentní s ODP, a lze ji tedy řešit pomocí stejných metod jako ODP), případně dvě vozidla (sjednocení jejich tras pak opět tvoří hamiltonovskou cestu, je zde jen podmínka navíc, že centrální místo musí být „někde uprostřed“ této cesty). Limit L tedy bude rozumné stanovit jako cca 2,5-násobek délky trasy z centrálního do nejvzdálenějšího místa, případně jako cca 4-násobek průměrné vzdálenosti ostatních míst od centrálního.

7.3 Výsledky

7.3.1 Typ 1

Tento typ příkladu je motivován situací, kdy je třeba provést rozvoz z Prahy do krajských měst České republiky. Praha leží přibližně uprostřed České republiky. Ostatních krajských měst je 12 a nejsou navzájem příliš blízko sebe. Podobná situace je např. i při rozvozech na nižších úrovních (z krajských měst do okresních, z okresních měst do center mikroregionů apod.).

Příklady byly vytvořeny následujícím způsobem: Byl dán kruh o poloměru 100 jednotek a centrální místo v jeho středu. Dále byl stanoven kruh o poloměru 20 jednotek se stejným středem, uvnitř kterého se nebudou nacházet žádná místa, kam by bylo třeba realizovat rozvoz (tento kruh představoval region náležící centrálnímu místu). Ve zbývajících částech 100-jednotkového kruhu (tj. mezikruží tvořeném oběma kruhy) bylo náhodně s rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti rozmístěno 20 míst. Tato místa byla agregována do 12 míst (regionálních center) tak, že byla postupně spojována vždy dvě navzájem nejbližší místa a nesmělo být nikdy spojeno 5 nebo více míst do jednoho výsledného (tato podmínka byla motivována tím, že v České republice je počet obyvatel nejlidnatějšího kraje o něco menší než 5-násobek počtu obyvatel nejméně lidnatého). Do těchto 12 míst bylo třeba realizovat rozvoz z centrálního místa. Limit L pro trasu, kterou mohlo absolvovat jedno vozidlo, byl stanoven na 250 jednotek.

Tímto postupem bylo vygenerováno 10 příkladů a každý z nich byl vyřešen metodou nejbližšího souseda (6.2.1, v následujících tabulkách označena MNS), metodou stromů (7.1.1, označena MS), třemi verzemi metody výhodnostních čísel (6.2.3, 7.1.2, SMVČ, LMVČ, NMVČ) a pomocí Habrových frekvencí (7.1.3, HF). Analýza podobná té následující, ale pro menší počet metod, byla provedena též v [91].

Nalezená řešení lze hodnotit ze dvou hledisek. Jednak nás může zajímat pouze celková doba samotného rozvozu či svozu, tj. nezapočítáváme do ní dobu jízdy z posledního místa zpět do centrálního v případě rozvozu či naopak dobu od výjezdu z centrálního místa po dojezd do prvního v případě svozu. Tyto výsledky jsou uvedeny v procentické formě (100% = nejlepší dosažený výsledek) v tabulce 4. Druhým hlediskem pro hodnocení jednotlivých řešení je (časová) délka celých tras včetně dojezdů/výjezdů vozidel do/z centrálního místa (celková doba jízdy). Jak si jednotlivé metody vedly podle tohoto kritéria je zaznamenáno v tabulce 5. V obou tabulkách jsou pro každou metodu doplněny průměrné výsledky a u každé úlohy její hodnocení podle níže popsaných vlastností, které budou použity při statistické analýze. Čtenář tak může získat první hrubý obrázek o tom, jak dobrých výsledků která z metod celkově dosahovala v porovnání s ostatními a jaký vliv na tyto výsledky měly jednotlivé vlastnosti úloh.

První z těchto vlastností je poměr mezi vzdálenostmi nejvzdálenějšího a nejbližšího z těch míst, která určující konvexní obal obsluhované oblasti, od centrálního místa. Tuto vlastnost budeme nazývat excentricita a v tabulkách bude označována E . Charakterizuje umístění centrálního stanoviště v obsluhované oblasti: její nízká hodnota znamená, že centrální místo leží „blízko středu“ této oblasti, naopak v případě vysoké hodnoty se nachází

na jejím okraji. Jinými slovy, z pohledu centrálního stanoviště se při nízké excentricitě vzdálená místa od něho nacházejí v různých směrech, zatímco v opačném případě jsou koncentrována v podstatě do jednoho nebo jen několika málo různých směrů.

Další vlastností je počet míst určujících konvexní obal této oblasti (KO). Má za cíl zhodnotit, jak mnoho je vzdálených míst nacházejících se v různých směrech od centrálního stanoviště.

Zbývající dvě vlastnosti popisují, kolik z ostatních míst je relativně daleko (a kolik naopak blízko) od centrálního místa. Jsou to poměr mezi největší a průměrnou vzdáleností od centrálního místa (MX:PR) a poměr mezi největší vzdáleností a mediánem vzdáleností od centrálního místa (MX:MD).

Všechny výše zmíněné zkratky používané v následujících tabulkách v této kapitole jsou přehledně uvedeny v tabulce 3.

Tabulka 3 Přehled zkratk v záhlaví tabulek pro analýzu ČORP

MNS	Metoda nejbližšího souseda
MS	Metoda stromů
LMVČ	Limitovaná metoda výhodnostních čísel
NMVČ	Nelimitovaná metoda výhodnostních čísel
SMVČ	Sekvenční metoda výhodnostních čísel
HF	Aplikace Habrových frekvencí
E	Excentricita
KO	Počet míst určujících konvexní obal obsluhované oblasti
MX:PR	Poměr mezi největší a průměrnou vzdáleností od centrálního místa
MX:MD	Poměr mezi největší vzdáleností a mediánem vzdáleností od centrálního místa

Tabulka 4 Porovnání řešení – celkový čas rozvozu (nejlepší = 100 %)

	MNS	MS	LMVČ	NMVČ	SMVČ	HF	E	KO	MX:PR	MX:MD
Příklad 1	112,9%	109,9%	114,6%	100,0%	106,2%	100,0%	1,68	7	1,45	1,41
Příklad 2	122,4%	108,5%	100,0%	100,0%	117,9%	100,0%	1,71	8	1,46	1,39
Příklad 3	105,5%	105,6%	116,9%	102,3%	102,3%	100,0%	1,76	7	1,47	1,44
Příklad 4	100,0%	107,2%	122,2%	114,7%	114,7%	102,7%	2,10	8	1,58	1,52
Příklad 5	100,0%	128,0%	107,5%	106,1%	116,4%	100,2%	1,26	6	1,49	1,43
Příklad 6	100,0%	112,4%	106,9%	109,8%	106,9%	100,0%	1,30	7	1,44	1,29
Příklad 7	107,3%	112,1%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	1,32	8	1,32	1,17
Příklad 8	107,2%	104,5%	100,8%	100,0%	108,8%	100,0%	1,52	8	1,30	1,25
Příklad 9	104,0%	130,3%	113,5%	103,7%	112,3%	100,0%	1,24	6	1,43	1,36
Příklad 10	107,1%	107,1%	114,6%	102,5%	118,2%	100,0%	1,66	9	1,29	1,14
Průměr	106,6%	112,6%	109,7%	103,9%	110,4%	100,3%				

Tabulka 5 Porovnání řešení – celkový čas jízdy (nejlepší = 100 %)

	MNS	MS	LMVČ	NMVČ	SMVČ	HF	E	KO	MX:PR	MX:MD
Příklad 1	108,8%	114,6%	104,6%	100,0%	104,4%	100,0%	1,68	7	1,45	1,41
Příklad 2	112,6%	109,4%	100,0%	100,0%	106,5%	100,0%	1,71	8	1,46	1,39
Příklad 3	107,6%	113,7%	119,9%	100,0%	110,3%	100,4%	1,76	7	1,47	1,44
Příklad 4	110,9%	117,5%	115,7%	110,1%	110,1%	100,0%	2,10	8	1,58	1,52
Příklad 5	105,9%	128,7%	111,6%	100,0%	115,1%	101,7%	1,26	6	1,49	1,43
Příklad 6	101,7%	110,2%	106,4%	100,0%	106,4%	101,7%	1,30	7	1,44	1,29
Příklad 7	106,0%	125,9%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	1,32	8	1,32	1,17
Příklad 8	108,6%	106,6%	112,5%	100,0%	110,4%	100,0%	1,52	8	1,30	1,25
Příklad 9	107,1%	114,5%	118,8%	102,6%	113,8%	100,0%	1,24	6	1,43	1,36
Příklad 10	105,5%	106,1%	115,9%	100,0%	107,4%	101,3%	1,66	9	1,29	1,14
Průměr	107,5%	114,7%	110,5%	101,3%	108,4%	100,5%				

Z tabulek je například vidět, že nejlépe si podle obou kritérií vedla aplikace Habrových frekvencí těsně následována nelimitovanou metodou výhodnostních čísel, zejména pokud se týče celkové doby jízdy. Překvapivě dobré jsou výsledky metody nejbližšího souseda, která se ukázala být nejlepší ze sekvenčně postupujících metod a u dvou z příkladů dosáhla dokonce nejkratšího času rozvozu ze všech metod. Nejhuře celkově

dopadla metoda stromů. Při pohledu na její výsledky ale pozorovatele například zaujme, že dosáhla relativně krátkých časů rozvozu u příkladů s velkou excentricitou.

Z těchto výsledků byl sestaven statistický soubor dat pro následující statistickou analýzu. Sestává z 10 statistických jednotek (kterými jsou jednotlivé příklady) a celkem 16 statistických znaků. Prvních šest jsou výsledky jednotlivých metod podle celkového času rozvozu, dalších šest výsledky podle celkového času jízdy a zbývající čtyři jsou charakteristiky podle jednotlivých výše vybraných vlastností. Výsledky metod jsou v tomto souboru uvedeny v poněkud jiné formě než v tabulkách 4 a 5: hodnoty těchto znaků udávají, o kolik se vypočtené délky liší od aritmetického průměru pro daný příklad (statistickou jednotku). Tento způsob byl zvolen proto, aby se jejich rozdělení pravděpodobnosti co nejvíce blížilo normálnímu. Test normality rozdělení ji ovšem nepotvrdil u žádného ze statistických znaků. Znaky popisující vlastnosti příkladů zřejmě nemohou mít normální rozdělení už vzhledem ke způsobu jejich generování, navíc znak počet míst na konvexním obalu má dokonce diskrétní charakter. Statistický soubor dat je vzhledem k velkému počtu statistických znaků (tj. sloupců) rozdělen do tří tabulek. V tabulce 6 je uvedeno prvních šest znaků, v tabulce 7 dalších šest znaků a v tabulce 8 zbývající čtyři znaky.

Tabulka 6 Statistický soubor dat – 1. část

	Celkový čas rozvozu					
	MNS	MS	LMVČ	NMVČ	SMVČ	HF
Příklad 1	5,3%	2,5%	6,8%	-6,8%	-1,0%	-6,8%
Příklad 2	13,2%	0,3%	-7,5%	-7,5%	9,0%	-7,5%
Příklad 3	0,0%	0,2%	10,8%	-3,0%	-3,0%	-5,1%
Příklad 4	-9,3%	-2,8%	10,8%	4,1%	4,1%	-6,9%
Příklad 5	-8,8%	16,6%	-2,0%	-3,2%	6,1%	-8,6%
Příklad 6	-5,6%	6,0%	0,8%	3,6%	0,8%	-5,6%
Příklad 7	3,9%	8,6%	-3,1%	-3,1%	-3,1%	-3,1%
Příklad 8	3,5%	0,9%	-2,7%	-3,4%	5,1%	-3,4%
Příklad 9	-6,0%	17,8%	2,6%	-6,3%	1,5%	-9,6%
Příklad 10	-1,1%	-1,0%	5,9%	-5,4%	9,2%	-7,6%

Tabulka 7 Statistický soubor dat – 2. část

	Celkový čas jízdy					
	MNS	MS	LMVČ	NMVČ	SMVČ	HF
Příklad 1	3,3%	8,7%	-0,8%	-5,1%	-1,0%	-5,1%
Příklad 2	7,5%	4,5%	-4,5%	-4,5%	1,7%	-4,5%
Příklad 3	-1,0%	4,6%	10,4%	-8,0%	1,5%	-7,6%
Příklad 4	0,1%	6,2%	4,5%	-0,6%	-0,6%	-9,7%
Příklad 5	-4,2%	16,5%	1,0%	-9,5%	4,2%	-8,0%
Příklad 6	-2,6%	5,6%	1,9%	-4,2%	1,9%	-2,6%
Příklad 7	0,6%	19,5%	-5,0%	-5,0%	-5,0%	-5,0%
Příklad 8	2,1%	0,3%	5,8%	-6,0%	3,8%	-6,0%
Příklad 9	-2,2%	4,6%	8,6%	-6,3%	3,9%	-8,6%
Příklad 10	-0,5%	0,1%	9,3%	-5,7%	1,3%	-4,5%

Tabulka 8 Statistický soubor dat – 3. část

	E	KO	MX:PR	MX:MD
Příklad 1	1,68	7	1,45	1,41
Příklad 2	1,71	8	1,46	1,39
Příklad 3	1,76	7	1,47	1,44
Příklad 4	2,10	8	1,58	1,52
Příklad 5	1,26	6	1,49	1,43
Příklad 6	1,30	7	1,44	1,29
Příklad 7	1,32	8	1,32	1,17
Příklad 8	1,52	8	1,30	1,25
Příklad 9	1,24	6	1,43	1,36
Příklad 10	1,66	9	1,29	1,14

Při určování, jak jistá vlastnost úlohy ovlivňuje úspěšnost dané metody, je třeba především určit, zda s rostoucí hodnotou statistického znaku, který ji popisuje, hodnota statistického znaku charakterizujícího výsledek roste nebo klesá. Vzhledem k tomu, že čas (jak v případě rozvozu, tak celé jízdy) je minimalizační kritérium, v prvně jmenovaném případě si metoda vede úspěšně při nízkých hodnotách statistického znaku vlastnosti, v opačném případě při vysokých. Ke zjištění tohoto plně stačí lineární regrese. Pro zjednodušení výpočtu i formy výsledků byla použita vícerozměrná lineární regrese, kde

nezávislými proměnnými byly všechny čtyři sledované vlastnosti úloh. Pokud zkoumáme, jak výsledky dosažené při řešení úlohy určitou metodou závisejí na jedné z těchto vlastností, mohou být při použití vícerozměrné regrese parametry této závislosti poněkud ovlivněny ostatními vlastnostmi (nezávislými proměnnými). Cílem však není popsat tuto závislost detailně, kvantitativně, ale stačí pouze zjistit, kdy si daná metoda vede relativně, kvalitativně lépe či hůře. Pro tyto účely uvedená nepřesnost vícerozměrné regrese nevadí.

Poznamenejme, že z prováděných analýz je regresní analýza jediná, která nepředpokládá normalitu rozdělení pravděpodobnosti.

V tabulce 9 jsou uvedeny parametry (přesněji řečeno jejich střední hodnoty) regresních nadrovin (včetně absolutního členu, který nemá pro účely tohoto rozboru význam) pro celkový čas rozvozu dosažený jednotlivými metodami a v tabulce 10 je totéž pro celkový čas jízdy. Důležitá jsou zejména znaménka těchto parametrů, absolutní hodnoty jsou podstatné až při porovnávání různých metod pro úlohy se stejnou vlastností.

Tabulka 9 Parametry regresní analýzy pro celkový čas rozvozu

	MNS	MS	LMVČ	NMVČ	SMVČ	HF
abs.člen	-0,4455	0,1664	1,7859	-0,4555	-1,0002	-0,0511
E	-0,2414	-0,2513	0,7410	0,0321	-0,2611	-0,0193
KO	0,1000	-0,0068	-0,1972	-0,0035	0,0949	0,0126
MX:PR	-1,1779	0,0567	0,6419	0,7822	-0,1399	-0,1631
MX:MD	1,3080	0,1820	-1,7702	-0,5320	0,6958	0,1164

Tabulka 10 Parametry regresní analýzy pro celkový čas jízdy

	MNS	MS	LMVČ	NMVČ	SMVČ	HF
abs.člen	-0,5275	-0,8399	1,7345	-0,4137	0,0822	-0,0356
E	-0,1309	-0,3304	0,4986	0,0122	-0,0363	-0,0132
KO	0,0617	0,0669	-0,1456	0,0139	-0,0015	0,0046
MX:PR	-0,4586	0,2015	0,0045	0,3203	-0,2161	0,1484
MX:MD	0,6947	0,4801	-1,0517	-0,1635	0,2276	-0,1872

V tabulkách 11 a 12 jsou tzv. p-hodnoty, které udávají, s jakou pravděpodobností leží parametry zjištěné regresní analýzou v intervalu symetrickém podle své střední hodnoty z tabulek 9 a 10, jehož jednou z hraničních hodnot je nula. Pravděpodobnost, že ve skutečnosti má koeficient opačné znaménko, je tedy polovina p-hodnoty. Zhruba lze říci, že

čím je p-hodnota nižší, tím vypočtená regresní nadrovina, a tak i lineární regrese vůbec, lépe charakterizuje realitu. Případy p-hodnot nižších než 0,05 (tj. kdy má parametr ve skutečnosti opačné znaménko s pravděpodobností menší než 2,5%) jsou v tabulkách 9 až 12 vyznačeny tučně (v takových případech bývá zjištěný typ závislosti považován za skutečně statisticky významný). Protože námi hledaná závislost nemusí být nutně právě lineární, můžeme si všimnout i horších p-hodnot. Vzhledem k tomu, jak vysoké skutečně vyšly, budeme sledovat p-hodnoty do velikosti cca 0,3.

Tabulka 11 p-hodnoty regresní analýzy pro celkový čas rozvozu

	MNS	MS	LMVČ	NMVČ	SMVČ	HF
abs.člen	0,7161	0,7762	0,0061	0,5143	0,2752	0,9003
E	0,5000	0,1750	0,0012	0,8700	0,3159	0,8692
KO	0,3618	0,8921	0,0021	0,9529	0,2350	0,7222
MX:PR	0,1883	0,8843	0,0583	0,1314	0,8079	0,5565
MX:MD	0,2639	0,7296	0,0040	0,4035	0,3863	0,7517
celkově	0,4860	0,0170	0,0068	0,4857	0,6959	0,7439

Tabulka 12 p-hodnoty regresní analýzy pro celkový čas jízdy

	MNS	MS	LMVČ	NMVČ	SMVČ	HF
abs.člen	0,3345	0,4945	0,1059	0,2577	0,8833	0,9232
E	0,3985	0,3589	0,1054	0,9009	0,8216	0,9008
KO	0,2070	0,5260	0,1129	0,6387	0,9745	0,8841
MX:PR	0,2236	0,8020	0,9942	0,1991	0,5701	0,5553
MX:MD	0,1783	0,6589	0,2409	0,5984	0,6540	0,5788
celkově	0,3430	0,6902	0,4555	0,2485	0,8126	0,4496

Skutečnost, která ve výsledcích zaujme pozorovatele jako první, jsou nízké p-hodnoty u času rozvozu vypočteného limitovanou metodou výhodnostních čísel. Kromě vlastnosti poměru největší a průměrné vzdálenosti od centrálního místa vychází všude menší než 0,5 a i u této vlastnosti uvedenou hodnotu jen těsně překračuje. Znamená to, že je zde se značnou spolehlivostí zaručena dokonce lineární závislost mezi časem rozvozu vypočteným touto metodou a hodnotami jednotlivých vlastností. Podle hodnot v tabulce 9 dává tato metoda řešení s dobrým časem rozvozu pro úlohy s malou excentricitou, velkým počtem míst na konvexním obalu obsluhované oblasti, nízkým poměrem největší a průměrné vzdálenosti od

centrálního místa a vysokým poměrem největší vzdálenosti a mediánu vzdáleností od centrálního místa (zajímavé je, že ač jsou si dvě posledně jmenované vlastnosti beze sporu velmi podobné, metoda dosahuje vzhledem k nim přesně opačné kvality výsledků). Všechny tyto závislosti jsou navíc velmi výrazné, jelikož příslušné koeficienty v tabulce 9 jsou relativně vysoké. U celkového času jízdy lineární závislost sice nevystihuje tak extrémně dobře realitu, ale p-hodnoty kolem 0,1 a opět vysoké koeficienty v tabulce 10 pro excentricitu a počet míst na konvexním obalu svědčí o podobné a stále dosti značné závislosti výsledku na těchto vlastnostech. Na poměru největší vzdálenosti a mediánu vzdáleností od centrálního místa závisí úspěšnost této metody co se týče celkového času jízdy již méně a na poměru největší a průměrné vzdálenosti od centrálního místa nezávisí vůbec (nejen velmi vysoká p-hodnota, ale také velmi nízká absolutní hodnota příslušného koeficientu v tabulce 10).

Tyto výsledky pro limitovanou metodu výhodnostních čísel jsou sice z teoretického hlediska velice zajímavé, ale je třeba mít na paměti, že tato verze metody výhodnostních čísel je celkově horší a méně dokonalá, než její nelimitovaná verze (z deseti testovacích příkladů byla úspěšnější jen jednou a to jen podle délky rozvozu).

Další velmi nízká p-hodnota charakterizuje celkově těsnou lineární závislost celkového času rozvozu získaného metodou stromů na všech vlastnostech úlohy zároveň. Pro jednotlivé vlastnosti jsou však již p-hodnoty podstatně horší. Za zmínku stojí jen to, že lze relativně krátký celkový čas rozvozu od této metody čekat pro úlohy s velkou excentricitou, ovšem p-hodnota, která to dokumentuje, už není zrovna nejnižší. Pro celkový čas jízdy regresní analýza žádnou závislost na jednotlivých vlastnostech úlohy neukázala.

Žádné jiné p-hodnoty pod 0,5 se v provedené regresní analýze již nevyskytují. Poměrně hodně již horších, ale vzhledem k účelu této analýzy ještě dosti solidních p-hodnot kolem 0,2 má metoda nejbližšího souseda. Dají se od ní tedy očekávat celkově lepší výsledky pro úlohy s vysokým poměrem největší a průměrné vzdálenosti od centrálního místa a nízkým poměrem největší vzdálenosti a mediánu vzdáleností od centrálního místa (opět opačné výsledky pro tyto dvě podobné vlastnosti stejně jako u limitované metody výhodnostních čísel) a pokud se celkového času jízdy týče, také pro úlohy s malým počtem míst na konvexním obalu.

Zaměřme se na ostatní verze metody výhodnostních čísel. Nelimitovaná metoda by mohla dávat solidní výsledky pro úlohy s nízkým poměrem největší a průměrné vzdálenosti od centrálního místa. U sekvenční verze je budou záviset dosažené výsledky na vlastnostech úlohy ještě méně. Kratší celkový čas rozvozu bylo možné čekat jedině u úloh s malým počtem míst na konvexním obalu a snad ještě možná u úloh s velkou excentricitou.

Pro aplikaci Habrových frekvencí regresní analýza žádnou závislost mezi kvalitou získaného řešení vlastnostmi úlohy neodhalila.

Doposud byly hodnoceny jednotlivé metody podle toho, jak si poradí s úlohami s různými vlastnostmi. Pro uživatele je ale důležitější, pokud má řešit úlohu s určitou vlastností, kterou pro ni vybrat metodu. Zaměřme se proto naopak na jednotlivé vlastnosti úloh a uveďme, které metody by pro ně měly dávat podle regresní analýzy dobré výsledky. Je ovšem třeba připomenout, že v následujícím přehledu jsou uvedeny jen ty metody, u nichž regresní analýza naznačila závislost jimi dosahovaných výsledků na dané vlastnosti úlohy, tj. které by si měly vést pro takovou úlohu relativně dobře. Přitom je třeba mít na paměti, že některé z níže uvedených metod dosahovaly celkově horších výsledků a že je naopak vhodné při řešení kdykoliv vyzkoušet např. aplikaci Habrových frekvencí, která dává celkově nejlepší výsledky, ale regresní analýza u ní neprokázala žádnou souvislost mezi dosaženými výsledky a vlastnostmi úlohy, a tak v následujícím přehledu nikde nefiguruje.

Pro úlohy s malou excentricitou je jednoznačnou volbou limitovaná metoda výhodnostních čísel. Při velké excentricitě je naopak nejvhodnější metoda stromů a je také případně možné zkusit i sekvenční metodu výhodnostních čísel. Tyto dvě metody ovšem slibují jen řešení s krátkým celkovým časem rozvozu, nikoliv celé jízdy.

V případě velkého počtu míst na konvexním obalu obsluhované oblasti je nejlepší opět limitovaná metoda výhodnostních čísel. V opačném případě lze doporučit metodu nejbližšího souseda při snaze o co nejkratší celkový čas jízdy a sekvenční metodu výhodnostních čísel, pokud je kladen důraz na celkový čas rozvozu.

Pro úlohy s nízkým poměrem největší a průměrné vzdálenosti od centrálního místa se nejlépe hodí nelimitovaná metoda výhodnostních čísel, zatímco její limitovaná verze zaručuje jen krátký celkový čas rozvozu, nikoliv celé jízdy. Pokud je poměr největší a průměrné vzdálenosti od centrálního místa vysoký, měla by být úspěšná metoda nejbližšího souseda.

Nakonec zbývá poměr největší vzdálenosti a mediánu vzdáleností od centrálního místa. Je-li vysoký, je dobré použít limitovanou metodu výhodnostních čísel, je-li nízký, potom metodu nejbližšího souseda.

Dalším typem statistické analýzy aplikovaným na statistický soubor dat obsahující výsledky dosažené jednotlivými metodami na testovacích příkladech je korelační analýza. Korelační koeficienty udávají míru těsnosti lineární závislosti mezi dvěma náhodnými veličinami. Korelační analýza předpokládá normalitu jejich rozdělení v tom smyslu, že při nesplnění tohoto požadavku z nekorelovanosti dvou statistických znaků ještě nevyplývá jejich nezávislost. V našem případě má tedy smysl si všimat v korelační matici v následujících

tabulkách vysokých absolutních hodnot, které indikují významně těsnou lineární závislost, zatímco nízké hodnoty žádný praktický význam nemají, neboť náhodné veličiny nemají normální rozdělení a navíc závislost mezi nimi nemusí být zrovna lineární. Korelační analýza tedy v našem případě nemusí odhalit všechny závislosti mezi jednotlivými statistickými znaky. Za statisticky podstatné bývají považovány závislosti významné na hladině významnosti 5% vyjádřené korelačními koeficienty s absolutní hodnotou alespoň 0,632. Ty jsou v následujících tabulkách vyznačeny tučně. Pro potvrzení výsledků regresní analýzy si ale budeme všimnout i koeficientů od absolutní hodnoty cca 0,5 výše.

Vzhledem k velkému počtu statistických znaků jsou výsledky korelační analýzy rozděleny do několika tabulek. V tabulce 13 je uvedena vzájemná závislost mezi celkovými časy rozvozu dosaženými jednotlivými metodami. V této části je vidět jediná relativně významná závislost mezi metodou nejbližšího souseda a nelimitovanou metodou výhodnostních čísel, která jen těsně nedosahuje hladiny významnosti 5% a je vyjádřena koeficientem $-0,62$. Záporné znaménko ukazuje, že tyto metody se navzájem doplňují, tj. čím dá jedna z metod lepší výsledek, tím dá druhá horší. Pokud tedy uživatel vyzkouší obě metody, měla by alespoň některá z nich dát bez ohledu na vlastnosti řešené úlohy dobrý výsledek.

Tabulka 13 Korelace mezi celkovými časy rozvozu navzájem

	MNS	MS	LMVČ	NMVČ	SMVČ	HF
MNS	1,00	-0,39	-0,46	-0,62	0,06	0,35
MS	-0,39	1,00	-0,35	-0,18	-0,17	-0,40
LMVČ	-0,46	-0,35	1,00	0,32	-0,33	-0,11
NMVČ	-0,62	-0,18	0,32	1,00	-0,18	0,27
SMVČ	0,06	-0,17	-0,33	-0,18	1,00	-0,45
HF	0,35	-0,40	-0,11	0,27	-0,45	1,00

Podobným způsobem je v tabulce 14 zaznamenána závislost mezi celkovým časem jízdy vypočteným jednotlivými metodami. Také zde se vyskytuje jediná závislost blízka hladině významnosti 5%, a to mezi metodou stromů a limitovanou metodou výhodnostních čísel. Také u těchto metod platí, že čím je jedna z nich pro konkrétní úlohu horší, tím je druhá lepší. Další korelační koeficienty s absolutní hodnotou kolem 0,5 svědčí o tom, že podobným způsobem se doplňují, ale v podstatně menší míře s metodou stromů také sekvenční metoda výhodnostních čísel a s limitovanou metodou výhodnostních čísel metoda nejbližšího

souseda. Naopak limitovaná a sekvenční verze metody výhodnostních čísel se budou v úspěšnosti u jednotlivých případů spíše shodovat. Je přitom zajímavé, že toto se zrovna příliš nedá říci o vztahu mezi nelimitovanou a sekvenční verzí.

Tabulka 14 Korelace mezi celkovými časy jízdy navzájem

	MNS	MS	LMVČ	NMVČ	SMVČ	HF
MNS	1,00	-0,23	-0,48	0,37	-0,27	0,30
MS	-0,23	1,00	-0,63	-0,21	-0,50	-0,09
LMVČ	-0,48	-0,63	1,00	-0,20	0,51	-0,40
NMVČ	0,37	-0,21	-0,20	1,00	-0,46	0,05
SMVČ	-0,27	-0,50	0,51	-0,46	1,00	-0,21
HF	0,30	-0,09	-0,40	0,05	-0,21	1,00

Pro úplnost a pro zajímavost je uvedena v tabulce 15 také korelace mezi celkovým časem rozvozu a celkovým časem jízdy, a to jak u jednoho řešení získaného určitou metodou (koeficienty na diagonále), tak u dvou řešení (stejněho příkladu) získaných dvěma různými metodami (u prvního se uvažuje celkový čas rozvozu zatímco u druhého celkový čas jízdy – koeficienty mimo diagonálu). Na diagonále jsou dle očekávání korelační koeficienty kladné, neboť řešení bývají v typickém případě dobrá nebo naopak špatná podle celkového času rozvozu i jízdy zároveň. Proto je poněkud překvapivá nízká hodnota tohoto koeficientu u aplikace Habrových frekvencí, zde se tedy dosti často stává, že řešení je podle jednoho z těchto dvou kritérií relativně horší než podle druhého. Mimo diagonálu se nachází několik korelačních koeficientů s absolutní hodnotou kolem 0,5, většinou se záporným znaménkem. Znamená to, že např. pokud metoda stromů najde dobré (resp. špatné) řešení z hlediska celkového času rozvozu, může u stejné úlohy metoda nejbližšího souseda nebo nelimitovaná metoda výhodnostních čísel častěji dosáhnout naopak špatného (resp. dobrého) výsledku podle celkového času jízdy. Další podobné vztahy si může čtenář v tabulce 15 vyhledat sám. Jediný kladný koeficient s uvedenou absolutní hodnotou potom značí, že zhruba stejně dobrého (či stejně špatného) výsledku se poměrně často dosahuje metodou nejbližšího souseda podle celkového času rozvozu a u stejné úlohy aplikací Habrových frekvencí podle celkového času jízdy.

Tabulka 15 Korelace mezi celkovými časy rozvozu (řádky) a jízdy (sloupce)

	MNS	MS	LMVČ	NMVČ	SMVČ	HF
MNS	0,89	-0,11	-0,48	0,01	-0,28	0,51
MS	-0,56	0,52	-0,09	-0,53	0,28	-0,22
LMVČ	-0,32	-0,26	0,63	0,21	-0,12	-0,42
NMVČ	-0,44	0,06	0,10	0,49	-0,12	-0,10
SMVČ	0,23	-0,41	0,04	0,05	0,49	0,05
HF	0,20	0,12	-0,20	0,14	-0,49	0,34

Následuje nejdůležitější část korelační analýzy: vztah mezi výsledky jednotlivých metod a vlastnostmi úlohy. Zaměříme se nejprve na celkový čas rozvozu – viz tabulka 16. Na první pohled v ní zaujmou korelační koeficienty mezi výsledky metody stromů a excentricitou a počtem míst na konvexním obalu obsluhované oblasti. Ty ukazují, že tato metoda dává dobré celkový čas rozvozu pro úlohy s vysokými hodnotami těchto dvou ukazatelů. Pro excentricitu to naznačila již regresní analýza, i když ne tak důrazně, pro počet míst na konvexním obalu však tuto závislost neobjevila. Připomeňme zároveň, že regresní analýza ukázala těsnou lineární závislost výsledků metody stromů na všech sledovaných vlastnostech úlohy současně.

Jinak tato část korelační analýzy potvrdila jen závislost celkového času rozvozu vypočteného limitovanou metodou výhodnostních čísel na excentricitě a její vhodnost pro úlohy s malou excentricitou, a tu navíc vyhodnotila jako méně významnou než regresní analýza, která dokázala specifikovat těsnou závislost výsledků této metody na všech sledovaných vlastnostech úlohy.

Tabulka 16 Korelace mezi celkovými časy rozvozu a vlastnostmi úlohy

	MNS	MS	LMVČ	NMVČ	SMVČ	HF
E	0,14	-0,84	0,56	0,19	0,16	0,05
KO	0,42	-0,77	0,00	0,04	0,36	0,43
MX:PR	-0,40	0,02	0,38	0,40	-0,07	-0,44
MX:MD	-0,27	0,00	0,37	0,20	-0,09	-0,40

Tabulka 17 ukazuje závislost celkového času jízdy vypočteného jednotlivými metodami na vlastnostech úlohy. Těmto údajům dominuje závislost výsledků aplikace Habrových frekvencí na poměru největší vzdálenosti a mediánu vzdáleností od centrálního

místa spočívající v tom, že dobré řešení metoda nachází, pokud má úloha tento poměr vysoký. Tato závislost se jako jediná těsně vejde do 5%-ní hladiny významnosti. Je to další případ závislosti, který nedokázala nalézt regresní analýza. Další vztahy nejsou již tak významné a jsou charakterizovány korelačními koeficienty s nižší absolutní hodnotou. Podle nich by měla aplikace Habrových frekvencí dosahovat kratších celkových časů jízdy také pro úlohy s vyšším poměrem největší a průměrné vzdálenosti od centrálního místa, nelimitovaná metoda výhodnostních čísel pro úlohy s malou excentricitou a malým počtem míst na konvexním obalu obsluhované oblasti a posledně jmenovaná vlastnost by měla vyhovovat i metodě nejbližšího souseda. Ze všech těchto vztahů přitom regresní analýza odhalila jen ten, který je uveden jako poslední.

Tabulka 17 Korelace mezi celkovými časy jízdy a vlastnostmi úlohy

	MNS	MS	LMVČ	NMVČ	SMVČ	HF
E	0,45	-0,39	0,16	0,57	-0,23	-0,27
KO	0,50	-0,34	-0,06	0,50	-0,42	0,37
MX:PR	-0,11	0,13	-0,04	0,26	0,11	-0,52
MX:MD	0,00	0,07	0,03	0,10	0,20	-0,64

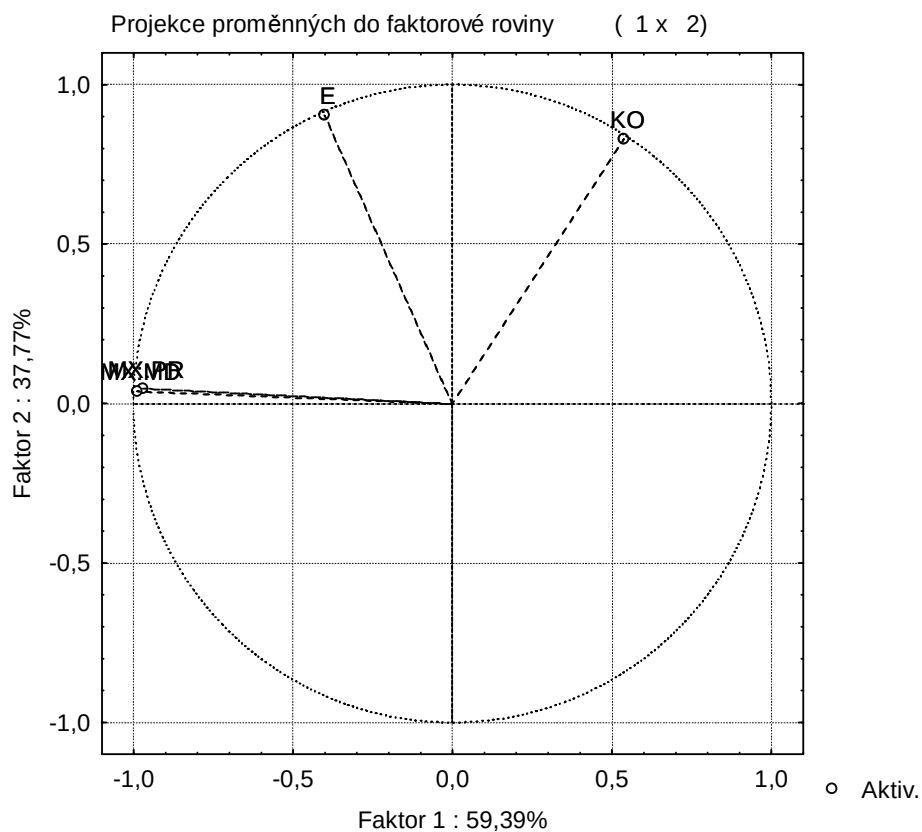
Aby byl výčet výsledků korelační analýzy úplný, zbývá už jen vyhodnotit vztahy mezi vlastnostmi úlohy navzájem. Z tabulky 18 je vidět, jak spolu velmi těsně souvisejí poměr největší a průměrné vzdálenosti od centrálního místa a poměr největší vzdálenosti a mediánu vzdáleností od centrálního místa. Jejich korelační koeficient je z celé korelační matice nejvyšší. Je ale zajímavé, že i všechny ostatní korelační koeficienty v této části analýzy mají dosti vysokou absolutní hodnotu, zhruba v intervalu 0,4 až 0,5. Také ony potvrzují závislosti, které lze intuitivně očekávat a následujícím způsobem vysvětlit. Velký počet míst na konvexním obalu může snáze zapříčinit, že úloha má velkou excentricitu, neboť je větší šance, že se mezi nimi najdou některá místa s rozdílnější vzdáleností od centrálního. Pokud má úloha velkou excentricitu, pak nejvzdálenější místo, které ji zapříčiňuje, zvyšuje i poměr mezi jeho vzdáleností a průměrem či mediánem vzdáleností všech míst od centrálního. Větší počet míst nacházejících se na konvexním obalu, a tedy relativně vzdálených od centrálního, naopak tento poměr snižuje.

Tabulka 18 Korelace mezi vlastnostmi úlohy navzájem

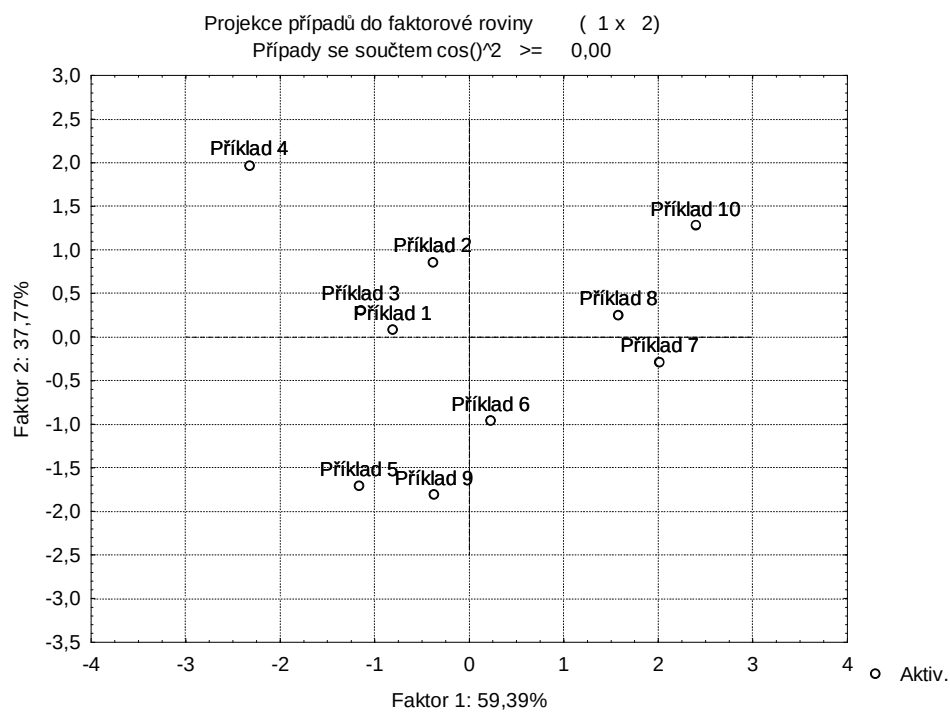
	E	KO	MX:PR	MX:MD
E	1,00	0,51	0,40	0,44
KO	0,51	1,00	-0,46	-0,51
MX:PR	0,40	-0,46	1,00	0,94
MX:MD	0,44	-0,51	0,94	1,00

V dosavadní části analýzy byly úlohy charakterizovány podle celkem čtyř různých vlastností. Cílem následujících úvah je tyto vlastnosti agregovat do menšího počtu, v ideálním případě pouze do dvou vlastností. K tomu byla použita analýza hlavních komponent a požadovaného záměru se skutečně podařilo dosáhnout.

Analýza hlavních komponent se snaží transformovat dané statistické znaky do stejného počtu jiných faktorů, z nichž při vhodném uspořádání několik prvních vysvětluje v co největší míře statistickou jednotku z hlediska všech původních znaků. Jak je vidět z obrázku 10, v našem případě našla tato analýza první dvě hlavní komponenty, z nichž první faktor vysvětluje námi sledované vlastnosti úloh z 59,39% a druhý z 37,77%, oba dohromady tedy z 97,16%. Na obrázku 11 je potom graficky znázorněno komponentní skóre všech deseti testovaných příkladů podle těchto dvou faktorů (tj. jejich hodnocení podle nově získaných agregovaných vlastností). V tabulce 19 je ještě uvedena korelace mezi těmito novými agregovanými vlastnostmi a původními vlastnostmi, jejíž koeficienty lze rovněž snadno odečíst z obrázku 10 jako souřadnice bodů určujících původní vlastnosti. Komponentní skóre pro první dva faktory je uvedeno v tabulce 20. Jeho hodnoty lze získat jako lineární kombinace ohodnocení příkladů (statistických jednotek) podle původních vlastností s koeficienty z tabulky 19.



Obrázek 10 Výsledky analýzy hlavních komponent – projekce proměnných do faktorové roviny



Obrázek 11 Výsledky analýzy hlavních komponent – projekce případů do faktorové roviny

Tabulka 19 Korelace vybraných dvou hlavních komponent a původních vlastností

	E	KO	MX:PR	MX:MD
Faktor 1	-0,40	0,54	-0,97	-0,99
Faktor 2	0,90	0,83	0,05	0,04

Tabulka 20 Komponentní skóre

	Faktor 1	Faktor 2
Příklad 1	-0,53	0,07
Příklad 2	-0,25	0,70
Příklad 3	-0,74	0,25
Příklad 4	-1,51	1,60
Příklad 5	-0,76	-1,39
Příklad 6	0,15	-0,78
Příklad 7	1,31	-0,23
Příklad 8	1,02	0,20
Příklad 9	-0,24	-1,47
Příklad 10	1,55	1,04

Nové vlastnosti úloh (komponentní skóre) si sice těžko bude propočítávat běžný uživatel, aby se podle nich rozhodoval, kterou metodu si vybere pro řešení úlohy, ale mohou být součástí výpočtu systému pro podporu rozhodování, kterému mohou zjednodušit práci v případě, že na jejich hodnotách budou významně záviset výsledky dosahované jednotlivými metodami. Proto podrobíme výsledky testování úloh také (vícerozměrné) regresní analýze podle těchto dvou nových faktorů. V tabulkách 21, resp. 22, jsou uvedeny parametry této regresní analýzy pro celkový čas rozvozu, resp. celkový čas jízdy a v tabulkách 23, resp. 24 příslušné p-hodnoty.

Tabulka 21 Parametry regresní analýzy pro celkový čas rozvozu

	MNS	MS	LMVČ	NMVČ	SMVČ	HF
abs.člen	-0,0050	0,0492	0,0224	-0,0310	0,0288	-0,0644
Faktor 1	0,0248	-0,0031	-0,0253	-0,0110	0,0054	0,0092
Faktor 2	0,0209	-0,0675	0,0222	0,0060	0,0133	0,0051

Tabulka 22 Parametry regresní analýzy pro celkový čas jízdy

	MNS	MS	LMVČ	NMVČ	SMVČ	HF
abs.člen	0,0031	0,0705	0,0311	-0,0549	0,0118	-0,0616
Faktor 1	0,0027	-0,0059	-0,0020	-0,0031	-0,0052	0,0135
Faktor 2	0,0180	-0,0262	0,0034	0,0148	-0,0102	0,0001

Tabulka 23 p-hodnoty regresní analýzy pro celkový čas rozvozu

	MNS	MS	LMVČ	NMVČ	SMVČ	HF
abs.člen	0,8333	0,0015	0,2725	0,0575	0,1046	0,0000
Faktor 1	0,3381	0,7721	0,2440	0,4714	0,7515	0,2262
Faktor 2	0,4147	0,0003	0,3010	0,6883	0,4408	0,4846
celkově	0,4474	0,0010	0,3010	0,6989	0,6921	0,3692

Tabulka 24 p-hodnoty regresní analýzy pro celkový čas jízdy

	MNS	MS	LMVČ	NMVČ	SMVČ	HF
abs.člen	0,7637	0,0113	0,1598	0,0001	0,2395	0,0000
Faktor 1	0,8066	0,7935	0,9268	0,6652	0,6107	0,0822
Faktor 2	0,1332	0,2684	0,8739	0,0688	0,3281	0,9855
celkově	0,2921	0,5028	0,9821	0,1599	0,5308	0,1984

Nově vytvořené faktory (vlastnosti úloh) se ukazují užitečné zejména při rozhodování, zda použít metodu stromů. Ta má velmi nízkou nejen celkovou p-hodnotu pro čas rozvozu, ale hlavně p-hodnotu pro faktor 2. Bude tedy spolehlivě dávat velmi dobrý celkový čas rozvozu pro úlohy s vysokou hodnotou tohoto faktoru. Vzhledem ke kladným korelačním koeficientům tohoto faktoru s excentricitou a počtem míst na konvexním obalu (viz tabulka 19) to odpovídá zjištění korelační analýzy, že metoda stromů je vhodná pro úlohy s vysokými hodnotami těchto dvou (původních) vlastností. Další p-hodnoty menší než 0,5 (tučně vyznačené v tabulkách 21 až 24) už se objevují pouze u absolutních členů, což nemá pro naši analýzu praktický význam.

p-hodnoty jen o málo vyšší nám pak doporučují při snaze o co nejkratší celkový čas jízdy použít nelimitovanou metodu výhodnostních čísel při nízké hodnotě faktoru 2 a aplikaci Habrových frekvencí při nízké hodnotě faktoru 1. V posledně jmenovaném případě vyjde

zároveň slušně i celkový čas rozvozu. Také metodě nejbližšího souseda bude vyhovovat (byť o trochu méně než nelimitované metodě výhodnostních čísel) při důrazu na krátký celkový čas jízdy nízká hodnota faktoru 2. Limitovaná metoda výhodnostních čísel by mohla dávat přijatelný celkový čas rozvozu pro úlohy s vysokou hodnotou faktoru 1 a nízkou hodnotou faktoru 2. Stejně dobrý čas rozvozu budou mít i řešení získaná metodou stromů pro úlohy s vysokou hodnotou faktoru 2, kterou jsme za řešení takových úloh už pochválili hned v úvodu tohoto hodnocení za výborný celkový čas jízdy.

Rady, jak vybrat metodu podle hodnot těchto nových dvou faktorů, jsou následující: Při nízké hodnotě faktoru 1 lze doporučit aplikaci Habrových frekvencí. V opačném případě bude snad nejlepší limitovaná metoda výhodnostních čísel, alespoň pokud se týče celkového času rozvozu. Při vysoké hodnotě faktoru 2 je zcela jednoznačnou volbou metoda stromů, v opačném případě je nejvhodnější metoda nejbližšího souseda z hlediska nejkratšího času jízdy, případně i limitovaná metoda výhodnostních čísel při snaze o krátký celkový čas rozvozu.

7.3.2 Typ 2

Všechny příklady z předchozí analýzy byly stejně velké, všechny měly 12 necentrálních míst. Nabízí se otázka, zda výsledky, které dosahují jednotlivé metody, nějak závisí na počtu míst (velikosti dat). Proto byl použit k testování další typ příkladu, který má 24 necentrálních míst. Centrální místo je opět ve středu kruhu o poloměru 100 jednotek. Necentrální místa jsou ovšem tentokrát náhodně s rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti rozmístěna v celém kruhu a není použita žádná agregace do „center regionů“ jako u předchozího typu (praktické situace s tak vysokým počtem regionů nebývají časté, necentrální místa by tak mohla reprezentovat spíše např. jednotlivé odběratele). Časový limit pro rozvoz L byl opět stanoven na 250 jednotek.

Deset příkladů tohoto typu bylo spočítáno metodou nejbližšího souseda, metodou stromů a aplikací Habrových frekvencí. Metoda výhodnostních čísel byla vynechána vzhledem k tomu, že je svou podstatou blízká aplikaci Habrových frekvencí, která v porovnání s ní dávala celkově lepší řešení, a v několika případech dokonce řešení identická s některými jejími verzemi. Metoda nejbližšího souseda byla naopak vybrána proto, že jako jediná kromě aplikace Habrových frekvencí dala v některých případech nejlepší řešení. Ve prospěch metody stromů potom hovoří kromě jejího charakteru odlišného od všech metod také silná zjištěná závislost jejích výsledků na excentricitě a počtu míst na konvexním obalu

obsluhované oblasti. Vzhledem ke způsobu generování a této objevené závislosti měly navíc příklady 1. typu právě pro počítání metodou stromů nevhodnou excentricitu.

Výsledky jsou, podobně jako v případě testování 1. typu příkladů, shrnuty v tabulce 25, resp. 26 porovnáním celkového času rozvozu, resp. celkového času jízdy dosažených jednotlivými metodami pro daný příklad v procentické formě (100% = nejlepší dosažený výsledek). Poměr mezi kvalitou výsledků aplikace Habrových frekvencí a metodou stromů zůstal zhruba stejný jako u příkladů 1. typu, zatímco metoda nejbližšího souseda si v porovnání s nimi poněkud pohoršila. Metoda stromů se naopak zlepšila v tom smyslu, že se jí podařilo najít jak podle celkového času rozvozu, tak podle celkového času jízdy vždy v jednom případě nejlepší řešení, a to navíc pokaždé v jiném.

Tabulka 25 Porovnání řešení – celkový čas rozvozu (nejlepší = 100%)

	MNS	MS	HF	E	KO	MX:PR	MX:MD
Příklad 1	112,2%	130,9%	100,0%	1,24	9	1,33	1,27
Příklad 2	108,2%	112,8%	100,0%	1,31	10	1,44	1,31
Příklad 3	131,4%	128,9%	100,0%	1,44	10	1,49	1,38
Příklad 4	115,0%	108,9%	100,0%	1,14	8	1,54	1,66
Příklad 5	102,3%	101,6%	100,0%	1,33	8	1,35	1,32
Příklad 6	119,0%	100,2%	100,0%	1,39	10	1,34	1,24
Příklad 7	120,8%	109,4%	100,0%	1,22	8	1,47	1,58
Příklad 8	101,0%	100,0%	105,2%	1,31	9	1,42	1,37
Příklad 9	120,7%	119,9%	100,0%	1,41	9	1,55	1,44
Příklad 10	100,0%	106,1%	114,5%	1,21	8	1,40	1,28
Průměr	113,1%	111,9%	102,0%				

Tabulka 26 Porovnání řešení – celkový čas jízdy (nejlepší = 100%)

	MNS	MS	HF	E	KO	MX:PR	MX:MD
Příklad 1	119,5%	149,9%	100,0%	1,24	9	1,33	1,27
Příklad 2	113,3%	117,2%	100,0%	1,31	10	1,44	1,31
Příklad 3	126,7%	131,3%	100,0%	1,44	10	1,49	1,38
Příklad 4	112,1%	110,0%	100,0%	1,14	8	1,54	1,66
Příklad 5	105,1%	112,0%	100,0%	1,33	8	1,35	1,32
Příklad 6	116,0%	102,5%	100,0%	1,39	10	1,34	1,24
Příklad 7	115,5%	113,1%	100,0%	1,22	8	1,47	1,58
Příklad 8	106,7%	104,7%	100,0%	1,31	9	1,42	1,37
Příklad 9	127,7%	137,2%	100,0%	1,41	9	1,55	1,44
Příklad 10	106,4%	100,0%	105,5%	1,21	8	1,40	1,28
Průměr	114,9%	117,8%	100,6%				

Pro statistický soubor dat byly výsledky metod stejně jako v předchozím případě modifikovány do formy odchylky vypočtené délky trasy od aritmetického průměru pro daný příklad. Soubor tedy obsahuje celkem 10 statistických znaků (tři znaky jsou celkové časy rozvozu dosažené jednotlivými metodami, další tři znaky jsou celkové časy jízdy a zbývající čtyři jsou hodnocení příkladů podle jednotlivých vlastností) a 10 statistických jednotek (jednotlivé příklady) a je celý uveden v tabulce 27. V [90] byla provedena pro tento typ příkladů podobná analýza pouze pro metodu stromů a aplikaci Habrových frekvencí, přičemž požadovaný omezený rozsah příspěvku ovšem neumožnil podrobnou publikaci výsledků.

Tabulka 27 Statistický soubor dat

	Celkový čas rozvozu			Celkový čas jízdy			E	KO	MX:PR	MX:MD
	MNS	MS	HF	MNS	MS	HF				
Příklad 1	-1,9%	14,4%	-12,6%	-2,9%	21,7%	-18,8%	1,24	9	1,33	1,27
Příklad 2	1,1%	5,4%	-6,5%	2,9%	6,4%	-9,2%	1,31	10	1,44	1,31
Příklad 3	9,4%	7,4%	-16,7%	6,2%	10,0%	-16,2%	1,44	10	1,49	1,38
Příklad 4	6,5%	0,9%	-7,4%	4,4%	2,4%	-6,8%	1,14	8	1,54	1,66
Příklad 5	1,0%	0,3%	-1,3%	-0,6%	6,0%	-5,4%	1,33	8	1,35	1,32
Příklad 6	11,9%	-5,8%	-6,0%	9,2%	-3,4%	-5,8%	1,39	10	1,34	1,24
Příklad 7	9,8%	-0,6%	-9,1%	5,5%	3,2%	-8,7%	1,22	8	1,47	1,58
Příklad 8	-1,1%	-2,0%	3,1%	2,8%	0,9%	-3,7%	1,31	9	1,42	1,37
Příklad 9	6,3%	5,6%	-11,9%	5,0%	12,8%	-17,8%	1,41	9	1,55	1,44
Příklad 10	-6,4%	-0,8%	7,2%	2,4%	-3,8%	1,5%	1,21	8	1,40	1,28

Podobným způsobem a s podobným cílem jako u 1. typu příkladů byla provedena vícerozměrná lineární regrese, tj. závislou proměnnou byl pokaždé některý z výsledků (buď celkový čas rozvozu nebo celkový čas jízdy) vypočtený některou metodou a nezávislými proměnnými byly vždy všechny čtyři sledované vlastnosti úloh. V tabulce 28 jsou uvedeny parametry regresních nadrovin a v tabulce 29 p-hodnoty. Význam těchto ukazatelů pro následující analýzu je teoreticky popsán u analýzy 1. typu úloh.

Tabulka 28 Parametry regresní analýzy

	Celkový čas rozvozu			Celkový čas jízdy		
	MNS	MS	HF	MNS	MS	HF
abs.člen	-0,9294	-0,0592	0,9886	-0,4791	-0,1869	0,6660
E	0,4424	-0,1963	-0,2461	0,1329	0,0704	-0,2033
KO	0,0340	0,0163	-0,0504	0,0167	0,0100	-0,0267
MX:PR	-0,6147	0,3443	0,2703	-0,0322	0,0474	-0,0152
MX:MD	0,7005	-0,2169	-0,4837	0,1725	-0,0039	-0,1686

Tabulka 29 p-hodnoty regresní analýzy

	Celkový čas rozvozu			Celkový čas jízdy		
	MNS	MS	HF	MNS	MS	HF
abs.člen	0,0202	0,9218	0,1309	0,1382	0,8248	0,3073
E	0,0666	0,6377	0,5400	0,5062	0,9028	0,6335
KO	0,1551	0,7144	0,2661	0,4415	0,8720	0,5629
MX:PR	0,0868	0,5900	0,6562	0,9140	0,9570	0,9812
MX:MD	0,0148	0,6093	0,2593	0,4025	0,9947	0,6959
celkově	0,0499	0,9451	0,4014	0,4879	0,9942	0,7364

Těsnou lineární závislost na sledovaných vlastnostech úloh vyjádřenou p-hodnotou menší než 0,5 zjistila regresní analýza jen u metody nejbližšího souseda, a to jen pro celkový čas rozvozu (v tabulkách 28 a 29 vyznačeno tučně). Soustředíme-li se na jednotlivé nezávislé proměnné, má takto nízkou p-hodnotu pouze poměr mezi největší vzdáleností a mediánem vzdáleností od centrálního místa a metoda dosahuje dobrých výsledků pro úlohy s nízkou hodnotou tohoto poměru. p-hodnoty ostatních vlastností jsou ovšem stále ještě poměrně nízké, a tak lze očekávat slušné výsledky i pro úlohy s malou excentricitou, vysokým poměrem mezi největší a průměrnou vzdáleností od centrálního místa a malým počtem míst na konvexním obalu obsluhované oblasti.

Při snaze pátrat po dalších nižších p-hodnotách lze objevit již jen p-hodnoty kolem 0,25 u celkového času rozvozu pro aplikaci Habrových frekvencí, které naznačují, že by si tato metoda mohla lépe počínat co se týče celkového času rozvozu při velkém počtu míst na konvexním obalu a vysoké hodnotě poměru mezi největší vzdáleností a mediánem vzdáleností od centrálního místa. Aplikace Habrových frekvencí se tedy vhodně doplňuje s metodou nejbližšího souseda, neboť ta by si právě v těchto dvou uvedených případech dobře vést neměla.

Ohledně celkového času jízdy regresní analýza tentokrát nezjistila vůbec žádnou závislost kvality řešení na žádné z vlastností úlohy.

Závislosti objevené touto regresní analýzou jsou v souladu se statistickou analýzou úloh 1. typu v tom smyslu, že pokud byla odhalena závislost v obou případech, dávala metoda dobrá řešení při stejném hodnocení úlohy z hlediska dané vlastnosti.

Tak jako u 1. typu příkladů byla také u 2. typu provedena korelační analýza s cílem znovu ukázat (potvrdit) závislosti zjištěné regresní analýzou (u 1. typu příkladů dokonce

odhalila některé závislosti, které z regresní analýzy nebyly patrné). Korelační matice bude opět rozdělena do několika tabulek.

V tabulce 30 jsou korelace mezi výsledky jednotlivých metod, a protože byly testovány pouze tři různé metody, jsou celkové časy rozvozu i celkové časy jízdy zpracovány v jedné tabulce.

V porovnání korelační analýzou výsledků úloh 1. typu je v této části korelační matice mnohem vyšší výskyt koeficientů s velmi vysokou absolutní hodnotou. Vysoké korelační koeficienty jsou především na diagonále submatic („kvadrantů“ této tabulky) popisujících vztah mezi celkovým časem rozvozu celkovým časem jízdy. Znamená to, že každá metoda nacházela 2. typu příkladů řešení, které bylo stejně kvalitní (buď dobré nebo špatné) podle obou těchto kritérií, což u 1. typu úloh nemuselo být pravidlem.

Dále je v tabulce 30 velký výskyt záporných koeficientů s velkou absolutní hodnotou svědčících o tom, že se v mnohých případech jednotlivé metody vhodně doplňují v tom smyslu, že pokud jedna ze zvolených metod dá špatné řešení, druhá dá dobré, a naopak. Především se to dá říci o vztahu mezi metodou stromů a aplikací Habrových frekvencí, kde jsou vysoké absolutní hodnoty ve všech čtyřech „kvadrantech“ této tabulky (hodnota $-0,61$ pro celkové časy rozvozu zaostává jen těsně za hranicí významnosti na hladině 5%). Mezi metodou stromů a aplikací Habrových frekvencí je podobná významná souvislost, která se vejde do 5%-ní hranice hladiny významnosti, ale týká pouze celkového času rozvozu, z ostatních hledisek na sobě výsledky získané těmito dvěma metodami nezávisí. Kromě toho korelační koeficienty s absolutní hodnotou přes 0,5 lze nalézt i u závislosti mezi metodou stromů a metodou nejbližšího souseda. Tyto metody se doplňují tak, že pokud metoda nejbližšího souseda dá řešení s dobrým (resp. špatným) celkovým časem jízdy, potom od metody stromů lze očekávat naopak řešení se špatným (resp. dobrým) celkovým časem jak rozvozu, tak i jízdy.

Tabulka 30 Korelace mezi výsledky metod navzájem

		Celkový čas rozvozu			Celkový čas jízdy		
		MNS	MS	HF	MNS	MS	HF
Celkový čas rozvozu	MNS	1,00	-0,22	-0,64	0,78	-0,07	-0,33
	MS	-0,22	1,00	-0,61	-0,56	0,93	-0,81
	HF	-0,64	-0,61	1,00	-0,19	-0,68	0,90
Celkový čas jízdy	MNS	0,78	-0,56	-0,19	1,00	-0,53	0,10
	MS	-0,07	0,93	-0,68	-0,53	1,00	-0,90
	HF	-0,33	-0,81	0,90	0,10	-0,90	1,00

Nejdůležitější část korelační analýzy, která hledala závislosti výsledků metod na vlastnostech úlohy, tentokrát žádné nenašla. V tabulce 31 se neobjevil dokonce ani žádný koeficient, který by měl absolutní hodnotu alespoň 0,5.

Tabulka 31 Korelace mezi výsledky metod a vlastnostmi úlohy

	Celkový čas rozvozu			Celkový čas jízdy		
	MNS	MS	HF	MNS	MS	HF
E	0,37	0,07	-0,35	0,37	0,17	-0,40
KO	0,32	0,21	-0,43	0,37	0,18	-0,40
MX:PR	0,36	0,06	-0,34	0,41	0,03	-0,25
MX:MD	0,41	-0,12	-0,25	0,26	-0,06	-0,06

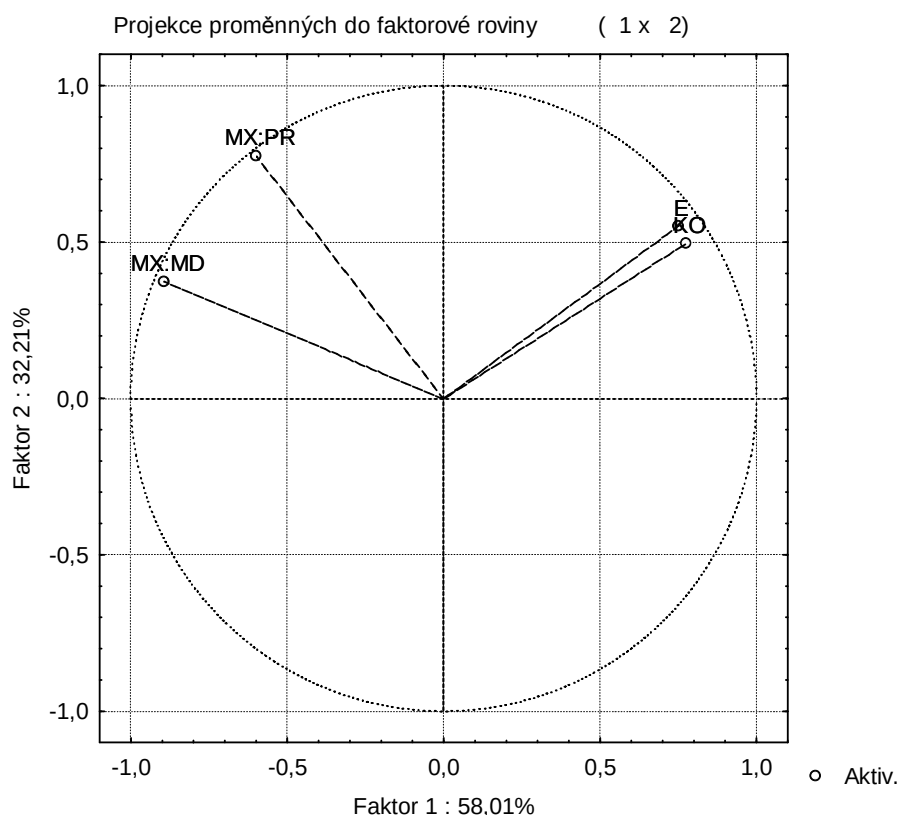
Na závěr korelační analýzy si také u 2. typu úloh všimneme, jak souvisejí jejich vlastnosti mezi sebou (korelační koeficienty jsou uvedeny v tabulce 32). Zajímavé je zejména porovnat situaci s 1. typem úloh (viz tabulka 18). Především se zde v podstatně větší míře projevuje spojitost mezi excentricitou a počtem míst na konvexním obalu, jejíž důvody byly popsány v rámci analýzy 1. typu úloh. Je to zřejmě způsobeno vyšším (absolutním) počtem míst na konvexním obalu. Stále je také vidět i podobnost poměru největší a průměrné vzdálenosti od centrálního místa a poměru největší vzdálenosti a mediánu vzdáleností od centrálního místa, i když při větším počtu míst u 2. typu úloh už není tak značná jako u 1. typu. Pozoruhodné je, že se obrátil vliv excentricity na poměr největší vzdálenosti a mediánu vzdáleností od centrálního místa, což patrně způsobila výše zmíněná těsnější souvislost mezi excentricitou a počtem míst na konvexním obalu, jehož vliv zde převážil, a tak tento poměr s rostoucí hodnotou obou těchto vlastností klesá. Excentricita ani počet míst

na konvexním obalu naopak nikterak neovlivňují poměr největší a průměrné vzdálenosti, tato nezávislost pravděpodobně souvisí s větší velikostí (počtem míst) úlohy.

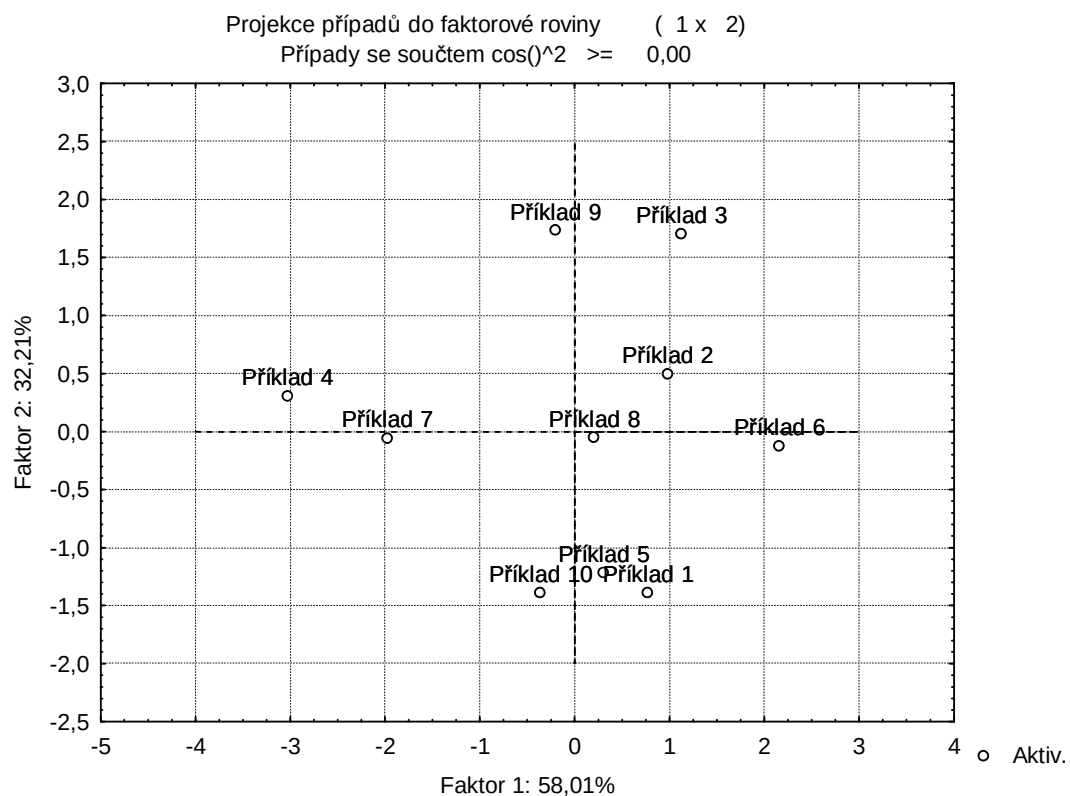
Tabulka 32 Korelace mezi vlastnostmi úlohy navzájem

	E	KO	MX:PR	MX:MD
E	1,00	0,72	-0,03	-0,46
KO	0,72	1,00	-0,10	-0,48
MX:PR	-0,03	-0,10	1,00	0,77
MX:MD	-0,46	-0,48	0,77	1,00

Také pro 2. typ příkladů byla provedena agregace čtyř sledovaných vlastností do dvou nových pomocí analýzy hlavních komponent. První z nich vysvětluje původní vlastnosti, jak je vidět na obrázku 12, z 58,01%, druhá z 32,21%, obě hlavní komponenty tedy celkem z 90,22%. Korelace mezi těmito dvěma novými faktory a původními vlastnostmi je popsána v tabulce 33. Koeficienty z této tabulky mohou potom posloužit k výpočtu kvantitativního ohodnocení jednotlivých příkladů (komponentního skóre), které je uvedeno v tabulce 34 a graficky znázorněno na obrázku 13.



Obrázek 12 Výsledky analýzy hlavních komponent – projekce proměnných do faktorové roviny



Obrázek 13 Výsledky analýzy hlavních komponent – projekce případů do faktorové roviny

Tabulka 33 Korelace vybraných dvou hlavních komponent a původních vlastností

	E	KO	MX:PR	MX:MD
Faktor 1	0,75	0,78	-0,60	-0,89
Faktor 2	0,55	0,50	0,77	0,37

Tabulka 34 Komponentní skóre

	Faktor 1	Faktor 2
Příklad 1	0,51	-1,22
Příklad 2	0,64	0,44
Příklad 3	0,74	1,50
Příklad 4	-1,99	0,27
Příklad 5	0,20	-1,08
Příklad 6	1,42	-0,11
Příklad 7	-1,30	-0,05
Příklad 8	0,14	-0,05
Příklad 9	-0,13	1,53
Příklad 10	-0,23	-1,22

Podle dvou nových faktorů byla provedena regresní analýza. Její parametry jsou v tabulce 35 a p-hodnoty v tabulce 36.

Tabulka 35 Parametry regresní analýzy

	Celkový čas rozvozu			Celkový čas jízdy		
	MNS	MS	HF	MNS	MS	HF
abs.člen	0,0366	0,0247	-0,0613	0,0348	0,0561	-0,0909
Faktor 1	-0,0015	0,0070	-0,0055	0,0014	0,0102	-0,0115
Faktor 2	0,0370	0,0065	-0,0435	0,0214	0,0109	-0,0323

Tabulka 36 p-hodnoty regresní analýzy

	Celkový čas rozvozu			Celkový čas jízdy		
	MNS	MS	HF	MNS	MS	HF
abs.člen	0,0654	0,2680	0,0227	0,0090	0,0785	0,0028
Faktor 1	0,9335	0,7553	0,8123	0,8988	0,7331	0,6040
Faktor 2	0,0748	0,7718	0,0908	0,0753	0,7163	0,1733
celkově	0,1823	0,9079	0,2121	0,1830	0,8763	0,3318

Tentokrát se nové vlastnosti vytvořené pomocí analýzy hlavních komponent zdaleka neukázaly tak užitečné jako u úloh 1. typu. Tučně vyznačené p-hodnoty menší než 0,5 se v tabulkách 35 a 36 objevují pouze u absolutních členů, jejichž koeficienty nemají pro

prováděnou analýzu žádný praktický význam. Několik dalších p-hodnot přijatelné výše se objevuje pouze u faktoru 2. Při nízké hodnotě tohoto faktoru bude tedy dávat dobrý celkový čas rozvozu i celkový čas jízdy metoda nejbližšího souseda, v opačném případě aplikace Habrových frekvencí. Faktor 1 je pro výběr vhodné metody bohužel zcela bezcenný.

7.3.3 Typ 3

Mayerova metoda dávala dobré výsledky pro úlohy s velkou excentricitou. Způsob generování předchozích dvou typů úloh ale takové příklady příliš neposkytoval. Abychom takové úlohy získali, byl další typ definován následujícím způsobem: Způsob rozmístění míst (a tedy i jejich počet) byl stejný jako u 1. typu, ale za centrální bylo zvoleno namísto místa ve středu kruhu to místo, které bylo od středu kruhu nejdále. I s touto situací se lze setkat v praxi často. Například sklady nebo výroby, které zásobují obchody ve městě, se obvykle nacházejí na jeho okraji. Podobné to někdy bývá i v případě center regionů (např. horských nebo příhraničních) nebo dokonce i některých států (Slovensko, Rakousko).

Deset takovýchto příkladů bylo opět vypočteno metodou nejbližšího souseda, metodou stromů a aplikací Habrových frekvencí. Výsledky jsou uvedeny v tabulkách 37 a 38 v podobné formě jako pro předchozí typy příkladů. Stejně jako u příkladů 2. typu dosáhla nejlepšího průměrného výsledku aplikace Habrových frekvencí a nejhoršího metoda nejbližšího souseda. Rozdíly mezi jednotlivými metodami však byly mnohem menší a úspěšnost metod se velmi lišila u jednotlivých příkladů..

Tabulka 37 Porovnání řešení – celkový čas rozvozu (nejlepší = 100 %)

	MNS	MS	HF	E	KO	MX:PR	MX:MD
Příklad 1	108,4%	100,0%	111,0%	2,49	7	1,45	1,44
Příklad 2	115,1%	100,1%	100,0%	3,61	8	1,60	1,62
Příklad 3	115,5%	120,7%	100,0%	3,97	7	1,68	1,75
Příklad 4	115,4%	100,0%	105,3%	2,89	8	1,56	1,54
Příklad 5	100,0%	100,9%	117,7%	3,36	6	1,43	1,36
Příklad 6	103,0%	111,8%	100,0%	3,66	7	1,47	1,38
Příklad 7	104,9%	100,0%	100,9%	2,51	8	1,64	1,89
Příklad 8	103,7%	106,9%	100,0%	3,19	8	1,59	1,64
Příklad 9	119,0%	100,6%	100,0%	1,80	6	1,47	1,48
Příklad 10	103,8%	112,0%	100,0%	5,80	9	1,51	1,44
Průměr	108,9%	105,3%	103,5%				

Tabulka 38 Porovnání řešení – celkový čas jízdy (nejlepší = 100%)

	MNS	MS	HF	E	KO	MX:PR	MX:MD
Příklad 1	104,7%	100,0%	102,7%	2,49	7	1,45	1,44
Příklad 2	123,3%	108,0%	100,0%	3,61	8	1,60	1,62
Příklad 3	111,7%	120,1%	100,0%	3,97	7	1,68	1,75
Příklad 4	109,1%	100,0%	101,0%	2,89	8	1,56	1,54
Příklad 5	100,0%	100,5%	102,3%	3,36	6	1,43	1,36
Příklad 6	104,8%	107,6%	100,0%	3,66	7	1,47	1,38
Příklad 7	105,0%	112,3%	100,0%	2,51	8	1,64	1,89
Příklad 8	109,6%	103,9%	100,0%	3,19	8	1,59	1,64
Příklad 9	128,7%	101,5%	100,0%	1,80	6	1,47	1,48
Příklad 10	102,0%	106,2%	100,0%	5,80	9	1,51	1,44
Průměr	109,9%	106,0%	100,6%				

Také tentokrát byly pro statistickou analýzu výsledky dosažené jednotlivými metodami převedeny do formy odchylky od průměrného výsledku. Statistický soubor dat je v tabulce 39.

Tabulka 39 Statistický soubor dat

	Celkový čas rozvozu			Celkový čas jízdy			E	KO	MX:PR	MX:MD
	MNS	MS	HF	MNS	MS	HF				
Příklad 1	1,8%	-6,1%	4,3%	2,2%	-2,4%	0,2%	2,49	7	1,45	1,44
Příklad 2	9,6%	-4,7%	-4,8%	11,7%	-2,2%	-9,5%	3,61	8	1,60	1,62
Příklad 3	3,1%	7,7%	-10,8%	1,0%	8,6%	-9,6%	3,97	7	1,68	1,75
Příklad 4	7,9%	-6,4%	-1,5%	5,5%	-3,3%	-2,3%	2,89	8	1,56	1,54
Příklad 5	-5,8%	-5,0%	10,8%	-0,9%	-0,4%	1,3%	3,36	6	1,43	1,36
Příklad 6	-1,9%	6,6%	-4,7%	0,6%	3,3%	-4,0%	3,66	7	1,47	1,38
Příklad 7	2,9%	-1,9%	-1,0%	-0,8%	6,2%	-5,5%	2,51	8	1,64	1,89
Příklad 8	0,2%	3,2%	-3,4%	4,9%	-0,6%	-4,3%	3,19	8	1,59	1,64
Příklad 9	11,7%	-5,6%	-6,1%	16,9%	-7,8%	-9,1%	1,80	6	1,47	1,48
Příklad 10	-1,4%	6,4%	-5,0%	-0,7%	3,4%	-2,7%	5,80	9	1,51	1,44

Tak jako u předchozích typů příkladů byla provedena vícerozměrná lineární regrese, jejíž pomocí byla zjištěna pro každou z metod závislost vypočteného času rozvozu a času jízdy na všech čtyřech zkoumaných vlastnostech úlohy. I pro tento typ uvádíme

v následujících tabulkách parametry regresních nadrovin (tabulka 40) a p-hodnoty (tabulka 41).

Tabulka 40 Parametry regresní analýzy

	Celkový čas rozvozu			Celkový čas jízdy		
	MNS	MS	HF	MNS	MS	HF
abs.člen	-0,5569	-0,4094	0,9663	-0,3214	-0,1329	0,4544
E	-0,0482	0,0452	0,0030	-0,0488	0,0465	0,0023
KO	0,0210	-0,0212	0,0002	0,0118	-0,0248	0,0130
MX:PR	0,7024	0,2572	-0,9597	0,6970	-0,2399	-0,4570
MX:MD	-0,3164	0,0086	0,3078	-0,4098	0,3448	0,0650

Tabulka 41 p-hodnoty regresní analýzy

	Celkový čas rozvozu			Celkový čas jízdy		
	MNS	MS	HF	MNS	MS	HF
abs.člen	0,3221	0,4211	0,1403	0,6127	0,6963	0,2602
E	0,1370	0,1317	0,9234	0,1880	0,0431	0,9110
KO	0,4750	0,4364	0,9948	0,7258	0,2090	0,5286
MX:PR	0,3339	0,6887	0,2374	0,4081	0,5896	0,3698
MX:MD	0,4059	0,9798	0,4543	0,3632	0,1796	0,8024
celkově	0,4713	0,2659	0,4682	0,6256	0,1161	0,4629

Největší závislost výsledků na vlastnostech úlohy tentokrát objevila regresní analýza u metody stromů, a to tentokrát zejména u celkového času jízdy. Jediná p-hodnota menší než 0,5 (tučně vyznačená v tabulkách 40 a 41) se objevila u excentricity, a metoda stromů tedy dává dobrý celkový čas jízdy pro úlohy s malou excentricitou. Podle dalších relativně nízkých p-hodnot by tato měla dávat metoda ve stejném případě i krátký celkový čas rozvozu a dále by měla dosahovat dobrého celkového času jízdy pro úlohy s nízkým poměrem mezi největší vzdáleností a mediánem vzdáleností od centrálního místa a s velkým počtem míst na konvexním obalu obsluhované oblasti.

Metoda nejbližšího souseda by si měla nejlépe počínat u úloh s velkou excentricitou jak z hlediska celkového času rozvozu, tak celkového času jízdy.

U aplikace Habrových frekvencí byly objeveny jen její poněkud lepší schopnosti ohledně celkového času rozvozu pro úlohy s vysokým poměrem mezi největší a průměrnou vzdáleností od centrálního místa.

Pokud máme tedy doporučit metodu podle vlastností úlohy, pak pro úlohy s malou excentricitou je vhodná metoda stromů a naopak pro úlohy s velkou excentricitou metoda nejbližšího souseda, pro příklady velkým počtem míst na konvexním obalu metoda stromů, rovněž při nízkém poměru mezi největší vzdáleností a mediánem vzdáleností od centrálního místa je vhodná metoda stromů a při vysokém poměru mezi největší a průměrnou vzdáleností od centrálního místa by se měla osvědčit nejspíše aplikace Habrových frekvencí.

Zajímavé je porovnání výsledků této analýzy s analýzou 1. typu příkladů. U metody stromů totiž jak regresní, tak i korelační analýza ukázaly výhodnost této metody pro úlohy s velkou excentricitou, zatímco právě provedená regresní analýza pro 3. typ příkladů ukázala přesný opak. Vzhledem k tomu, že příklady 1. typu měly všechny malou excentricitu do cca 2, zatímco příklady 3. typu naopak velkou, od cca 2, znamená to, že tato metoda dává dobré výsledky pro středně velkou excentricitu (kolem 2). Pro malou nebo naopak příliš velkou excentricitu se tato metoda nehodí.

Podobná situace nastává také u excentricity u metody nejbližšího souseda. Tato metoda dosahuje u úloh 2. typu dobrých výsledků při malé excentricitě, zatímco u příkladů 3. typu při velké excentricitě.

U ostatních metod se v případech, kdy byla zjištěna závislost řešení získaných některou metodou na určité vlastnosti úlohy regresní analýzou pro příklady 3. typu a zároveň některou z analýz pro některý z předchozích typů příkladů, se výsledky těchto analýz shodovaly.

Také pro tento 3. typ příkladů byla provedena i korelační analýza. Její výsledky jsou opět rozloženy do několika tabulek.

V první části korelační matice v tabulce 42, která ukazuje vztahy mezi kvalitou řešení nalezených jednotlivými metodami u určitého příkladu, jsou na diagonále v submaticích vysoké koeficienty, což značí, že každé z nalezených řešení, ať až kteroukoli metodou a pro jakýkoli z příkladů 3. typu, bylo stejně dobré (či stejně špatné) z hlediska celkového času rozvozu i celkového času jízdy (stejně jako u 2. typu příkladů, ale do jisté míry na rozdíl od 1. typu).

U 2. typu příkladu bylo konstatováno, že mimo diagonály všech submatic že velký počet záporných koeficientů s vysokými absolutními hodnotami. U 3. typu příkladu sice není tolik z nich, které se vejdu do 5% hladiny významnosti (v tabulce 42 vyznačeny tučně), ale

mnohem větší počet z nich má hodnoty kolem $-0,5$ až $-0,6$. Znamená to, že se jednotlivé metody navzájem doplňují z hlediska kvality řešení ještě lépe než u předchozích typů příkladů a že lze v podstatě kdykoli doporučit použití kterékoliv dvojice ze tří testovaných metod. Nejlépe se vzájemně doplňují metoda nejbližšího souseda a metoda stromů, zejména pokud jde o celkový čas jízdy. Kombinace metody nejbližšího souseda a aplikace Habrových frekvencí může často zklamat jedině pokud hodnotíme celkový čas jízdy podle prvně jmenované a celkový čas rozvozu podle druhé z nich. Pokud zaměníme obě kritéria, doplňují se tyto dvě metody naopak velmi dobře. Relativně nejhorší situace by mohly nastávat v případě kombinace metody stromů a aplikace Habrových frekvencí, ale stále by dosti často měla alespoň jedna z nich dávat řešení s dobrým celkovým časem rozvozu.

Tabulka 42 Korelace mezi výsledky metod navzájem

		Celkový čas rozvozu			Celkový čas jízdy		
		MNS	MS	HF	MNS	MS	HF
Celkový čas rozvozu	MNS	1,00	-0,44	-0,48	0,85	-0,50	-0,67
	MS	-0,44	1,00	-0,57	-0,46	0,74	-0,21
	HF	-0,48	-0,57	1,00	-0,32	-0,27	0,83
Celkový čas jízdy	MNS	0,85	-0,46	-0,32	1,00	-0,76	-0,58
	MS	-0,50	0,74	-0,27	-0,76	1,00	-0,09
	HF	-0,67	-0,21	0,83	-0,58	-0,09	1,00

Máme-li hodnotit vhodnost jednotlivých metod pro úlohy s určitou vlastností, korelační analýza v podstatě potvrdila výsledky regresní analýzy.

Pro metodu stromů slibuje korelační analýza u úloh s malou excentricitou výborný především celkový čas rozvozu (jediná závislost významná na hladině významnosti 5% tučně vyznačená v tabulce 43), zatímco regresní analýza více vyzdvihovala naopak celkový čas jízdy. Obě analýzy se shodly na míře vhodnosti této metody pro úlohy s nízkým poměrem mezi největší vzdáleností a mediánem vzdáleností od centrálního místa. Korelační analýza ponechala bez povšimnutí vliv počtu míst na konvexním obalu obsluhované oblasti, ale naopak by více věřila metodě stromů pro úlohy s nízkým poměrem mezi největší a průměrnou vzdáleností od centrálního místa. Všechna zde uvedená doporučení se týkají celkového času jízdy.

U metody nejbližšího souseda se korelační i regresní analýza shodly v jejím dobrém hodnocení podle dosahovaného celkového času rozvozu i celkového času jízdy pro úlohy s velkou excentricitou.

Při aplikaci Habrových frekvencí souhlasila korelační analýza s jejím doporučením regresní analýzou pro úlohy s vysokým poměrem mezi největší a průměrnou vzdáleností od centrálního místa za účelem dosažení dobrého celkového času rozvozu. Korelační analýza v tomto případě slibuje stejně dobrý i celkový čas jízdy, a ten by se této metodě mělo celkem dařit dosahovat i pro úlohy s vysokým poměrem mezi největší vzdáleností a mediánem vzdáleností od centrálního místa.

Tabulka 43 Korelace mezi výsledky metod a vlastnostmi úlohy

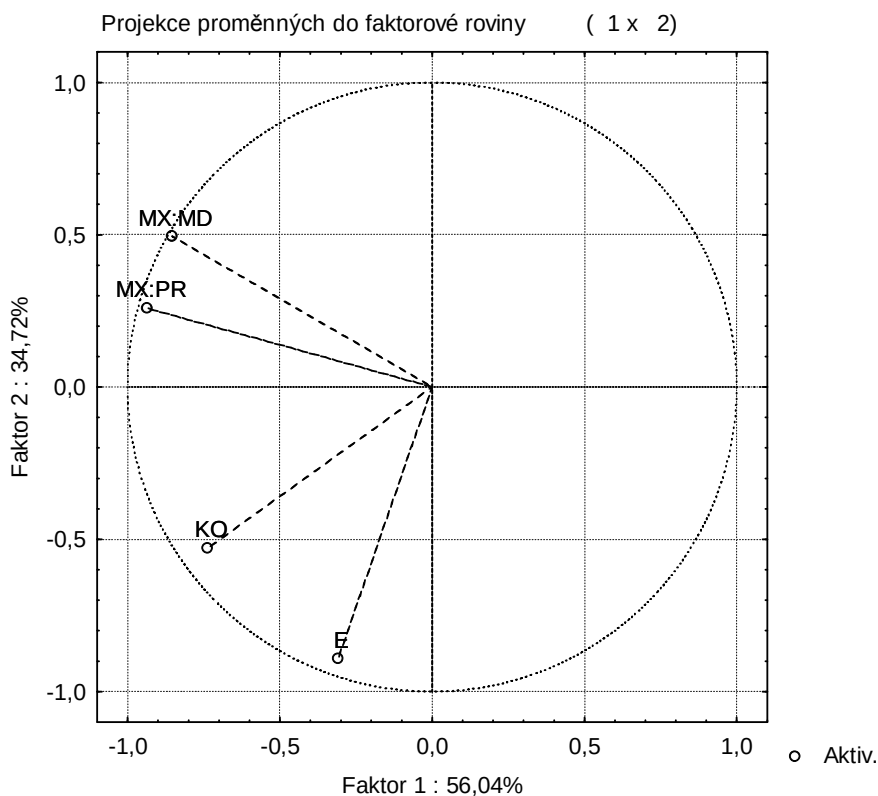
	Celkový čas rozvozu			Celkový čas jízdy		
	MNS	MS	HF	MNS	MS	HF
E	-0,46	0,68	-0,24	-0,48	0,52	0,08
KO	0,01	0,31	-0,32	-0,24	0,31	-0,03
MX:PR	0,29	0,34	-0,59	-0,06	0,55	-0,60
MX:MD	0,31	0,12	-0,40	-0,03	0,48	-0,54

V závislostech mezi jednotlivými vlastnostmi úloh navzájem (viz tabulka 44) existují některé podobnosti s úlohami 1. typu. Především velice těsná je souvislost poměru mezi největší a průměrnou vzdáleností od centrálního místa s poměrem mezi největší vzdáleností a mediánem vzdáleností od centrálního místa. Dále spolu souvisí velikost excentricity a počtu míst na konvexním obalu (roste-li jedna z těchto hodnot, roste i druhá). Na rozdíl od úloh 1. typu ale u úloh 3. typu poměr mezi největší a průměrnou vzdáleností od centrálního místa s rostoucím počtem míst na konvexním obalu roste (u 1. typu klesal). Další vzájemné souvislosti mezi jednotlivými vlastnostmi už korelační analýza u 3. typu úloh nenašla, takže celkově lze říci, že se u tohoto typu jednotlivé vlastnosti navzájem ovlivňují mnohem méně než u 1. typu.

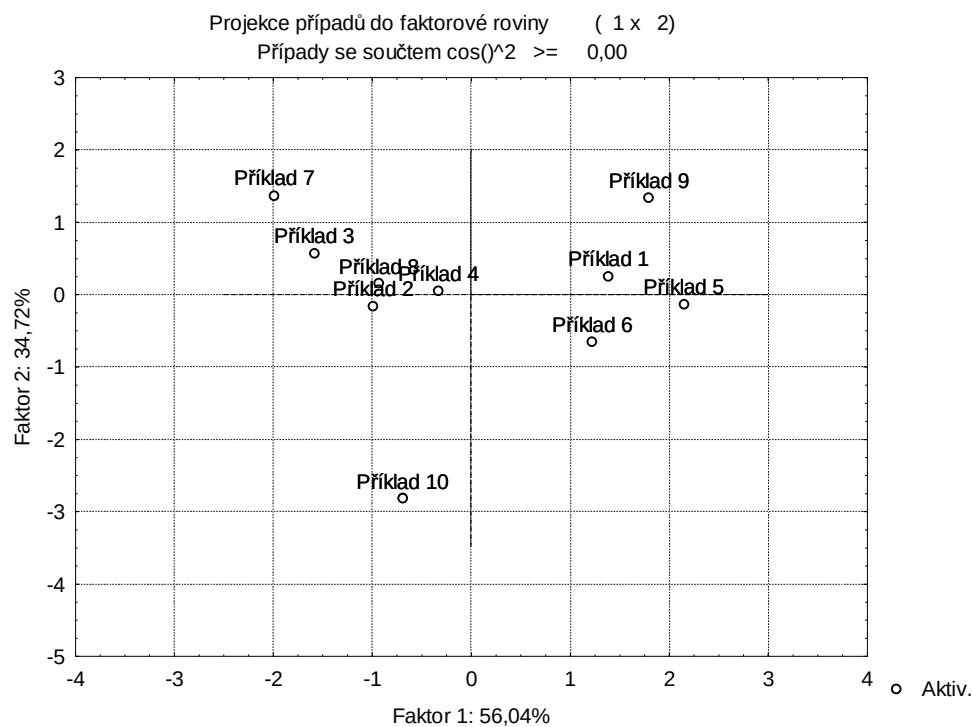
Tabulka 44 Korelace mezi vlastnostmi úlohy navzájem

	E	KO	MX:PR	MX:MD
E	1,00	0,56	0,11	-0,16
KO	0,56	1,00	0,47	0,35
MX:PR	0,11	0,47	1,00	0,91
MX:MD	-0,16	0,35	0,91	1,00

Pomocí analýzy hlavních komponent se i u tohoto typu příkladu pokusíme snížit počet sledovaných vlastností a nahradit původní čtyři dvěma novými. Jak je vidět obrázku 14, byla i tentokrát analýza hlavních komponent podobně úspěšná jako v předchozích případech. První faktor vysvětluje všechny původní vlastnosti z 56,04%, druhý z 34,72%, oba dohromady tedy z 90,77%. V tabulce 45 jsou korelační koeficienty mezi těmito novými faktory a původními vlastnostmi, jejichž pomocí lze kvantitativně vyjádřit hodnocení příkladů podle nových vlastností (komponentní skóre). To je graficky znázorněno na obrázku 15 a numericky uvedeno v tabulce 46.



Obrázek 14 Výsledky analýzy hlavních komponent – projekce proměnných do faktorové roviny



Obrázek 15 Výsledky analýzy hlavních komponent – projekce případů do faktorové roviny

Tabulka 45 Korelace vybraných dvou hlavních komponent a původních vlastností

	E	KO	MX:PR	MX:MD
Faktor 1	-0,31	-0,74	-0,93	-0,85
Faktor 2	-0,89	-0,53	0,26	0,50

Tabulka 46 Komponentní skóre

	Faktor 1	Faktor 2
Příklad 1	0,92	0,22
Příklad 2	-0,66	-0,14
Příklad 3	-1,06	0,49
Příklad 4	-0,22	0,04
Příklad 5	1,43	-0,11
Příklad 6	0,82	-0,55
Příklad 7	-1,33	1,17
Příklad 8	-0,63	0,13
Příklad 9	1,20	1,14
Příklad 10	-0,46	-2,39

I pro tento 3. typ příkladů byla provedena regresní analýza, aby ukázala, jak kvalita řešení získaných jednotlivými sledovanými metodami závisí na nových faktorech. Výsledky (parametry) této analýzy jsou v tabulce 47, p-hodnoty v tabulce 48.

Tabulka 47 Parametry regresní analýzy

	Celkový čas rozvozu			Celkový čas jízdy		
	MNS	MS	HF	MNS	MS	HF
abs.člen	0,0281	-0,0059	-0,0222	0,0404	0,0049	-0,0453
Faktor 1	-0,0100	-0,0224	0,0323	0,0108	-0,0287	0,0179
Faktor 2	0,0252	-0,0264	0,0013	0,0224	-0,0087	-0,0137

Tabulka 48 p-hodnoty regresní analýzy

	Celkový čas rozvozu			Celkový čas jízdy		
	MNS	MS	HF	MNS	MS	HF
abs.člen	0,1470	0,7395	0,2612	0,0771	0,7358	0,0056
Faktor 1	0,6010	0,2522	0,1355	0,6155	0,0902	0,1834
Faktor 2	0,2088	0,1844	0,9497	0,3130	0,5712	0,2952
celkově	0,3818	0,2246	0,3025	0,5158	0,1923	0,2453

Jediná p-hodnota menší než 0,5 (vyznačena tučně) se vyskytuje u absolutního členu, takže nemá žádný praktický význam, ale v tabulce 48 je několik p-hodnot v rozmezí cca 0,1 až 0,3 u lineárních členů. Podle toho lze při vysoké hodnotě faktoru 1 doporučit metodu stromů (zejména celkový čas jízdy bude vycházet velmi dobře, ale ani celkový čas rozvozu nebude špatný) a v opačném případě aplikaci Habrových frekvencí. Budeme-li posuzovat úlohu podle faktoru 2, potom při jeho nízké hodnotě vybereme metodu nejbližšího souseda, zatímco při vysoké hodnotě si můžeme vybrat metodu stromů, abychom dosáhli dobrého celkového času rozvozu, nebo aplikaci Habrových frekvencí, pokud se nám jedná o celkový čas jízdy.

7.3.4 Shrnutí

Doposud jsme analyzovali práci jednotlivých metod pro řešení ČORP na třech různých typech příkladů. V mnoha ohledech byly výsledky těchto analýz pro všechny tři typy úloh podobné, na druhou stranu se ale také dosti často lišily. Proto byly pro ty metody, které byly vyzkoušeny na všech typech, sloučeny všechny jejich výsledky u všech tří typů příkladů

do jednoho statistického souboru a podrobeny stejným statistickým analýzám, jaké byly dosud provedeny u jednotlivých typů.

Jednotlivé typy úloh se mezi sebou lišily velikostí dat (počtem míst). Jednou ze sledovaných vlastností přitom byl počet míst na konvexním obalu obsluhované oblasti. Úlohy s vyšším (resp. nižším) celkovým počtem míst ovšem mívají také vyšší (resp. nižší) počet míst na konvexním obalu. Nabízí se tedy otázka, zda si všimnat absolutního počtu míst na konvexním obalu nebo relativního podílu míst na konvexním obalu na celkovém počtu míst, tedy poměru mezi počtem míst na konvexním obalu a celkovým počtem necentrálních míst. Tato nová vlastnost byla přidána do statistického souboru (ve všech následujících tabulkách je značena %KO), zároveň byl ale mezi pozorovanými vlastnostmi ponechán (absolutní) počet míst na konvexním obalu.

V následujících tabulkách budou shrnuty údaje o výsledcích, které metody dosáhly pro jednotlivé příklady všech tří typů, a také výsledky jednotlivých statistických analýz podobným způsobem jako tomu bylo doposud u jednotlivých typů úloh. Příklady prvního typu jsou přitom značeny pořadovými čísly 1 až 10, druhého typu 11 až 20 a posledního třetího typu 21 až 30.

Nejprve jsou tedy porovnány výsledky dosažené jednotlivými metodami s nejlepším dosaženým výsledkem (označen 100%) jednak pro celkový čas rozvozu (tabulka 49), jednak pro celkový čas jízdy (tabulka 50). Pro lepší celkovou představu jsou opět doplněny průměrné výsledky pro každou metodu a hodnocení každé úlohy podle jejích vlastností.

Srovnání celkových výsledků vychází nejlépe pro aplikaci Habrových frekvencí, s odstupem za ní následují zbývající dvě metody: metoda nejbližšího souseda a metoda stromů. Toto hodnocení je shodné pro celkový čas rozvozu i pro celkový čas jízdy.

Pro statistický soubor dat jsou výsledky dosažené jednotlivými metodami opět transformovány do formy odchylek od průměrného dosaženého výsledku pro daný příklad. Statistický soubor dat je uveden v tabulce 51.

Stejně jako u jednotlivých typů příkladů byla také na tento souhrnný soubor aplikována jako první druh analýzy vícerozměrná lineární regrese. Parametry (koeficienty regresní funkce) jsou v tabulce 52, p-hodnoty v tabulce 53.

Tabulka 49 Porovnání řešení – celkový čas rozvozu (nejlepší = 100%)

	MNS	MS	HF	E	KO	MX:PR	MX:MD	%KO
Příklad 1	112,9%	109,9%	100,0%	1,68	7	1,45	1,41	0,58
Příklad 2	122,4%	108,5%	100,0%	1,71	8	1,46	1,39	0,67
Příklad 3	105,5%	105,6%	100,0%	1,76	7	1,47	1,44	0,58
Příklad 4	100,0%	107,2%	102,7%	2,10	8	1,58	1,52	0,67
Příklad 5	100,0%	128,0%	100,2%	1,26	6	1,49	1,43	0,50
Příklad 6	100,0%	112,4%	100,0%	1,30	7	1,44	1,29	0,58
Příklad 7	107,3%	112,1%	100,0%	1,32	8	1,32	1,17	0,67
Příklad 8	107,2%	104,5%	100,0%	1,52	8	1,30	1,25	0,67
Příklad 9	104,0%	130,3%	100,0%	1,24	6	1,43	1,36	0,50
Příklad 10	107,1%	107,1%	100,0%	1,66	9	1,29	1,14	0,75
Příklad 11	112,2%	130,9%	100,0%	1,24	9	1,33	1,27	0,38
Příklad 12	108,2%	112,8%	100,0%	1,31	10	1,44	1,31	0,42
Příklad 13	131,4%	128,9%	100,0%	1,44	10	1,49	1,38	0,42
Příklad 14	115,0%	108,9%	100,0%	1,14	8	1,54	1,66	0,33
Příklad 15	102,3%	101,6%	100,0%	1,33	8	1,35	1,32	0,33
Příklad 16	119,0%	100,2%	100,0%	1,39	10	1,34	1,24	0,42
Příklad 17	120,8%	109,4%	100,0%	1,22	8	1,47	1,58	0,33
Příklad 18	101,0%	100,0%	105,2%	1,31	9	1,42	1,37	0,38
Příklad 19	120,7%	119,9%	100,0%	1,41	9	1,55	1,44	0,38
Příklad 20	100,0%	106,1%	114,5%	1,21	8	1,40	1,28	0,33
Příklad 21	108,4%	100,0%	111,0%	2,49	7	1,45	1,44	0,58
Příklad 22	115,1%	100,1%	100,0%	3,61	8	1,60	1,62	0,67
Příklad 23	115,5%	120,7%	100,0%	3,97	7	1,68	1,75	0,58
Příklad 24	115,4%	100,0%	105,3%	2,89	8	1,56	1,54	0,67
Příklad 25	100,0%	100,9%	117,7%	3,36	6	1,43	1,36	0,50
Příklad 26	103,0%	111,8%	100,0%	3,66	7	1,47	1,38	0,58
Příklad 27	104,9%	100,0%	100,9%	2,51	8	1,64	1,89	0,67
Příklad 28	103,7%	106,9%	100,0%	3,19	8	1,59	1,64	0,67
Příklad 29	119,0%	100,6%	100,0%	1,80	6	1,47	1,48	0,50
Příklad 30	103,8%	112,0%	100,0%	5,80	9	1,51	1,44	0,75
Průměr	109,5%	109,9%	101,9%					

Tabulka 50 Porovnání řešení – celkový čas jízdy (nejlepší = 100%)

	MNS	MS	HF	E	KO	MX:PR	MX:MD	%KO
Příklad 1	108,8%	114,6%	100,0%	1,68	7	1,45	1,41	0,58
Příklad 2	112,6%	109,4%	100,0%	1,71	8	1,46	1,39	0,67
Příklad 3	107,1%	113,2%	100,0%	1,76	7	1,47	1,44	0,58
Příklad 4	110,9%	117,5%	100,0%	2,10	8	1,58	1,52	0,67
Příklad 5	104,1%	126,6%	100,0%	1,26	6	1,49	1,43	0,50
Příklad 6	100,0%	108,4%	100,0%	1,30	7	1,44	1,29	0,58
Příklad 7	106,0%	125,9%	100,0%	1,32	8	1,32	1,17	0,67
Příklad 8	108,6%	106,6%	100,0%	1,52	8	1,30	1,25	0,67
Příklad 9	107,1%	114,5%	100,0%	1,24	6	1,43	1,36	0,50
Příklad 10	104,2%	104,8%	100,0%	1,66	9	1,29	1,14	0,75
Příklad 11	119,5%	149,9%	100,0%	1,24	9	1,33	1,27	0,38
Příklad 12	113,3%	117,2%	100,0%	1,31	10	1,44	1,31	0,42
Příklad 13	126,7%	131,3%	100,0%	1,44	10	1,49	1,38	0,42
Příklad 14	112,1%	110,0%	100,0%	1,14	8	1,54	1,66	0,33
Příklad 15	105,1%	112,0%	100,0%	1,33	8	1,35	1,32	0,33
Příklad 16	116,0%	102,5%	100,0%	1,39	10	1,34	1,24	0,42
Příklad 17	115,5%	113,1%	100,0%	1,22	8	1,47	1,58	0,33
Příklad 18	106,7%	104,7%	100,0%	1,31	9	1,42	1,37	0,38
Příklad 19	127,7%	137,2%	100,0%	1,41	9	1,55	1,44	0,38
Příklad 20	106,4%	100,0%	105,5%	1,21	8	1,40	1,28	0,33
Příklad 21	104,7%	100,0%	102,7%	2,49	7	1,45	1,44	0,58
Příklad 22	123,3%	108,0%	100,0%	3,61	8	1,60	1,62	0,67
Příklad 23	111,7%	120,1%	100,0%	3,97	7	1,68	1,75	0,58
Příklad 24	109,1%	100,0%	101,0%	2,89	8	1,56	1,54	0,67
Příklad 25	100,0%	100,5%	102,3%	3,36	6	1,43	1,36	0,50
Příklad 26	104,8%	107,6%	100,0%	3,66	7	1,47	1,38	0,58
Příklad 27	105,0%	112,3%	100,0%	2,51	8	1,64	1,89	0,67
Příklad 28	109,6%	103,9%	100,0%	3,19	8	1,59	1,64	0,67
Příklad 29	128,7%	101,5%	100,0%	1,80	6	1,47	1,48	0,50
Příklad 30	102,0%	106,2%	100,0%	5,80	9	1,51	1,44	0,75
Průměr	110,6%	112,6%	100,4%					

Tabulka 51 Statistický soubor dat

	Celkový čas rozvozu			Celkový čas jízdy			E	KO	MX :PR	MX :MD	%KO
	MNS	MS	HF	MNS	MS	HF					
Příklad 1	4,9%	2,2%	-7,1%	1,0%	6,3%	-7,2%	1,68	7	1,45	1,41	0,58
Příklad 2	11,0%	-1,6%	-9,3%	4,9%	2,0%	-6,8%	1,71	8	1,46	1,39	0,67
Příklad 3	1,7%	1,9%	-3,6%	0,3%	6,0%	-6,4%	1,76	7	1,47	1,44	0,58
Příklad 4	-3,2%	3,8%	-0,6%	1,3%	7,4%	-8,6%	2,10	8	1,58	1,52	0,67
Příklad 5	-8,6%	17,0%	-8,4%	-5,6%	14,8%	-9,3%	1,26	6	1,49	1,43	0,50
Příklad 6	-4,0%	7,9%	-4,0%	-2,7%	5,4%	-2,7%	1,30	7	1,44	1,29	0,58
Příklad 7	0,8%	5,3%	-6,1%	-4,2%	13,8%	-9,6%	1,32	8	1,32	1,17	0,67
Příklad 8	3,2%	0,6%	-3,7%	3,3%	1,5%	-4,8%	1,52	8	1,30	1,25	0,67
Příklad 9	-6,7%	16,9%	-10,2%	-0,1%	6,8%	-6,7%	1,24	6	1,43	1,36	0,50
Příklad 10	2,2%	2,3%	-4,5%	1,2%	1,7%	-2,9%	1,66	9	1,29	1,14	0,75
Příklad 11	-1,9%	14,4%	-12,6%	-2,9%	21,7%	-18,8%	1,24	9	1,33	1,27	0,38
Příklad 12	1,1%	5,4%	-6,5%	2,9%	6,4%	-9,2%	1,31	10	1,44	1,31	0,42
Příklad 13	9,4%	7,4%	-16,7%	6,2%	10,0%	-16,2%	1,44	10	1,49	1,38	0,42
Příklad 14	6,5%	0,9%	-7,4%	4,4%	2,4%	-6,8%	1,14	8	1,54	1,66	0,33
Příklad 15	1,0%	0,3%	-1,3%	-0,6%	6,0%	-5,4%	1,33	8	1,35	1,32	0,33
Příklad 16	11,9%	-5,8%	-6,0%	9,2%	-3,4%	-5,8%	1,39	10	1,34	1,24	0,42
Příklad 17	9,8%	-0,6%	-9,1%	5,5%	3,2%	-8,7%	1,22	8	1,47	1,58	0,33
Příklad 18	-1,1%	-2,0%	3,1%	2,8%	0,9%	-3,7%	1,31	9	1,42	1,37	0,38
Příklad 19	6,3%	5,6%	-11,9%	5,0%	12,8%	-17,8%	1,41	9	1,55	1,44	0,38
Příklad 20	-6,4%	-0,8%	7,2%	2,4%	-3,8%	1,5%	1,21	8	1,40	1,28	0,33
Příklad 21	1,8%	-6,1%	4,3%	2,2%	-2,4%	0,2%	2,49	7	1,45	1,44	0,58
Příklad 22	9,6%	-4,7%	-4,8%	11,7%	-2,2%	-9,5%	3,61	8	1,60	1,62	0,67
Příklad 23	3,1%	7,7%	-10,8%	1,0%	8,6%	-9,6%	3,97	7	1,68	1,75	0,58
Příklad 24	7,9%	-6,4%	-1,5%	5,5%	-3,3%	-2,3%	2,89	8	1,56	1,54	0,67
Příklad 25	-5,8%	-5,0%	10,8%	-0,9%	-0,4%	1,3%	3,36	6	1,43	1,36	0,50
Příklad 26	-1,9%	6,6%	-4,7%	0,6%	3,3%	-4,0%	3,66	7	1,47	1,38	0,58
Příklad 27	2,9%	-1,9%	-1,0%	-0,8%	6,2%	-5,5%	2,51	8	1,64	1,89	0,67
Příklad 28	0,2%	3,2%	-3,4%	4,9%	-0,6%	-4,3%	3,19	8	1,59	1,64	0,67
Příklad 29	11,7%	-5,6%	-6,1%	16,9%	-7,8%	-9,1%	1,80	6	1,47	1,48	0,50
Příklad 30	-1,4%	6,4%	-5,0%	-0,7%	3,4%	-2,7%	5,80	9	1,51	1,44	0,75

Tabulka 52 Parametry regresní analýzy

	Celkový čas rozvozu			Celkový čas jízdy		
	MNS	MS	HF	MNS	MS	HF
abs.člen	-0,1878	-0,1753	0,3631	-0,1258	-0,1796	0,3054
E	-0,0095	-0,0098	0,0193	-0,0004	-0,0170	0,0174
KO	0,0225	-0,0092	-0,0133	0,0084	0,0041	-0,0125
MX:PR	-0,2373	0,5339	-0,2967	-0,0056	0,3011	-0,2955
MX:MD	0,2561	-0,3334	0,0773	0,0780	-0,1517	0,0737
%KO	0,0646	-0,0269	-0,0377	-0,0333	-0,0010	0,0343

Tabulka 53 p-hodnoty regresní analýzy

	Celkový čas rozvozu			Celkový čas jízdy		
	MNS	MS	HF	MNS	MS	HF
abs.člen	0,4068	0,5165	0,1457	0,5341	0,5167	0,1147
E	0,4502	0,5142	0,1636	0,9735	0,2735	0,1069
KO	0,0196	0,4025	0,1851	0,3087	0,7121	0,1103
MX:PR	0,3538	0,0881	0,2869	0,9803	0,3379	0,1733
MX:MD	0,0846	0,0620	0,6212	0,5467	0,3935	0,5428
%KO	0,4850	0,8072	0,7063	0,6871	0,9929	0,6574
celkově	0,1323	0,4834	0,4548	0,7304	0,7462	0,1251

Nejtěsnější závislost našla regresní analýza u celkového času rozvozu získaného metodou nejbližšího souseda na počtu míst na konvexním obalu obsluhované oblasti. Ten vychází výborně, pokud je míst na konvexním obalu málo (v tabulkách 52 a 53 vyznačeno tučně). Celkový čas jízdy je v tomto případě na hranici kvality, kdy ještě stojí za zmínku. Metoda nejbližšího souseda dává také velmi dobrý celkový čas rozvozu při nízkém poměru mezi největší vzdáleností a mediánem vzdáleností od centrálního místa.

Metodou stromů lze dosáhnout velmi dobrý celkový čas rozvozu pro úlohy s nízkým poměrem mezi největší a průměrnou vzdáleností od centrálního místa a vysokým poměrem mezi největší vzdáleností a mediánem vzdáleností od centrálního místa (je zajímavé, že dílčí analýzy pro jednotlivé typy příkladů to nezjistily). Z hlediska celkového času jízdy by si tato metoda měla podle této analýzy vést nejlépe snad u úloh s velkou excentricitou. Připomeňme však, že ohledně závislosti kvality řešení metodou stromů na excentricitě dávaly předchozí

analýzy poněkud rozporuplné výsledky, které lze na základě porovnání analýzy pro 1. a 3. typ příkladů nejspíše interpretovat tak, že metoda je nejvhodnější pro úlohy se středně velkou excentricitou (cca kolem 2).

Určitou míru závislosti na některých vlastnostech úlohy objevila tato souhrnná analýza i u výsledků aplikace Habrových frekvencí. Ta by si měla dobře počínat zejména z hlediska celkového času jízdy, ale i celkového času rozvozu u úloh s malou excentricitou, velkým počtem míst na konvexním obalu a vysokým poměrem mezi největší a průměrnou vzdáleností od centrálního místa.

Máme-li doporučovat vhodné metody podle jednotlivých vlastností úlohy, pak se ukázalo velkým omylem uvažovat o podílu míst na konvexním obalu na celkovém počtu míst (poměru mezi počtem míst na konvexním obalu a celkovým počtem necentrálních míst). Regresní analýza nenašla žádnou závislost mezi touto vlastností a výsledky, které jednotlivé metody dosáhly.

Naopak dosti jednoznačně lze doporučit metodu na základě (absolutního) počtu míst na konvexním obalu. Je-li jich málo, je nejlepší metoda nejbližšího souseda, a v opačném případě aplikace Habrových frekvencí.

Pro úlohy s malou excentricitou se nejvíce hodí aplikace Habrových frekvencí. Středně velká excentricita (kolem 2) představuje nejlepší podmínky pro metodu stromů.

Při nízkém poměru mezi největší a průměrnou vzdáleností od centrálního místa dosáhneme nejkratšího času rozvozu metodou stromů. Je-li naopak vysoký, dává nejlepší výsledky aplikace Habrových frekvencí.

Poměr mezi největší vzdáleností a mediánem vzdáleností od centrálního místa naopak metodě stromů pro dosažení co nejkratšího času rozvozu vyhovuje, pokud je vysoký. V opačném případě dostaneme stejně dobrý výsledek metodou nejbližšího souseda.

Následují výsledky korelační analýzy, jako obvykle díky ke svému rozsahu rozdělené do několika tabulek. Vzhledem k většímu počtu statistických jednotek (příkladů) jsou významné na hladině významnosti 5% již závislosti s absolutními hodnotami korelačních koeficientů od 0,39, a proto jsou všechny takto vysoké hodnoty vyznačeny v následujících tabulkách tučně.

Nejdříve jsou v tabulce 54 uvedeny vzájemné korelace mezi kvalitou řešení nalezených jednotlivými metodami u určitého příkladu. Vysoké kladné koeficienty na diagonálách submatic opět ukazují, že každé řešení vypočtené kteroukoliv metodou je téměř vždy buď dobré nebo špatné zároveň podle celkového času rozvozu i podle celkového času jízdy.

Zbývající koeficienty jsou všechny záporné a většinou mají i vysoké absolutní hodnoty. Opět to znamená, že vybrané metody se navzájem doplňují, tj. pokud jedna metoda dá špatné řešení, druhá by měla dát dobré, a rozhodně se tedy vyplatí bez ohledu na vlastnosti úlohy zkusit více metod. Tento vztah je o to důležitější, že se prokázal u souboru sestaveného ze všech testovaných typů příkladů, a dá se tedy předpokládat, že by mohl platit zcela obecně. Zároveň to ukazuje, že užší výběr metod pro 2. a 3. typ příkladů byl správný a že při jiné volbě by se metody tak dobře doplňovat nemusely.

Podíváme-li se na jednotlivé dvojice metod konkrétně, zcela po všech stránkách se doplňují metoda stromů a aplikace Habrových frekvencí. O něco horší je vztah mezi metodou nejbližšího souseda a metodou stromů, zde se příliš dobře nedoplňuje celkový čas rozvozu vypočtený prvně jmenovanou metodou s celkovým časem jízdy získaným druhou. Nejhorší situace nastává ve vztahu mezi metodou nejbližšího souseda a metodou stromů, zde lze doporučit vyzkoušet obou metod zároveň pouze při snaze o co nejkratší celkový čas rozvozu.

Tabulka 54 Korelace mezi výsledky metod navzájem

		Celkový čas rozvozu			Celkový čas jízdy		
		MNS	MS	HF	MNS	MS	HF
Celkový čas rozvozu	MNS	1,00	-0,55	-0,39	0,77	-0,32	-0,31
	MS	-0,55	1,00	-0,56	-0,59	0,79	-0,46
	HF	-0,39	-0,56	1,00	-0,11	-0,54	0,81
Celkový čas jízdy	MNS	0,77	-0,59	-0,11	1,00	-0,65	-0,11
	MS	-0,32	0,79	-0,54	-0,65	1,00	-0,69
	HF	-0,31	-0,46	0,81	-0,11	-0,69	1,00

Korelační analýza ovšem nepotvrdila žádné závislosti výsledků metod na vlastnostech úlohy, jak je vidět z další tabulky 55.

Tabulka 55 Korelace mezi výsledky metod a vlastnostmi úlohy

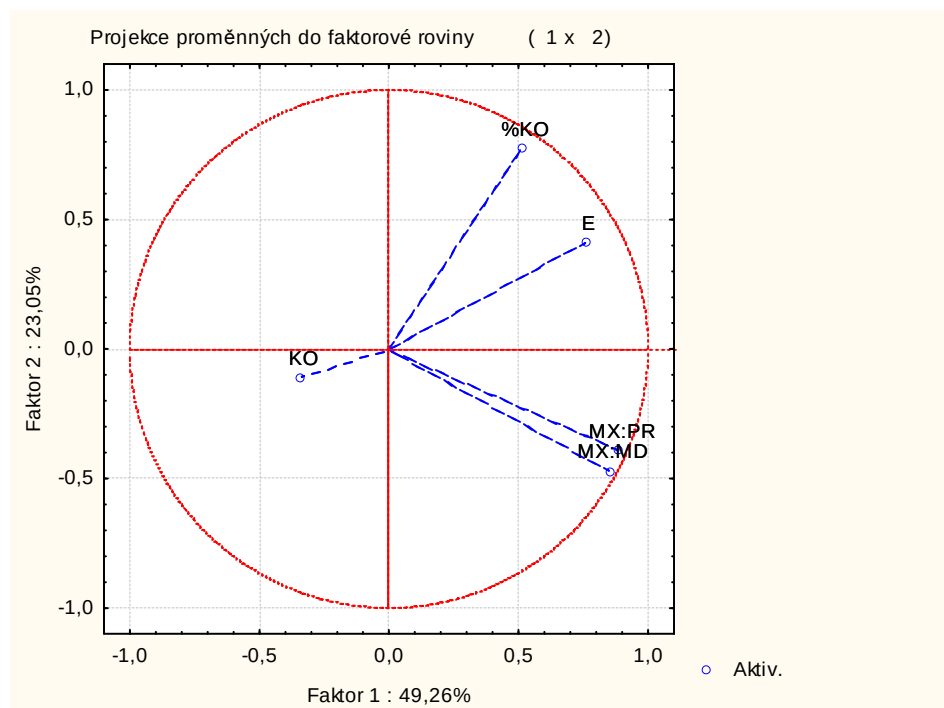
	Celkový čas rozvozu			Celkový čas jízdy		
	MNS	MS	HF	MNS	MS	HF
E	-0,05	-0,13	0,19	0,02	-0,24	0,29
KO	0,35	-0,09	-0,26	0,17	0,12	-0,31
MX:PR	0,13	-0,03	-0,10	0,19	-0,05	-0,11
MX:MD	0,23	-0,17	-0,04	0,21	-0,11	-0,06
%KO	-0,01	-0,07	0,09	-0,11	-0,14	0,29

Ze vzájemných závislostí mezi vlastnostmi úloh (viz tabulka 56) byl prokázán především soulad mezi poměrem mezi největší a průměrnou vzdáleností od centrálního místa a poměrem mezi největší vzdáleností a mediánem vzdáleností od centrálního místa. Jediné další, co bylo zjištěno, bylo, že s rostoucí excentricitou rostou také oba jmenované poměry (vysoké hodnoty všech tří těchto údajů způsobuje existence nějakého relativně vzdáleného místa od centrálního) a podílu míst na konvexním obalu na celkovém počtu míst (při vyšším počtu míst na konvexním obalu se také snáze objeví rozdíly mezi jejich vzdálenostmi od centrálního místa, což zapříčiní velkou excentricitu).

Tabulka 56 Korelace mezi vlastnostmi úlohy navzájem

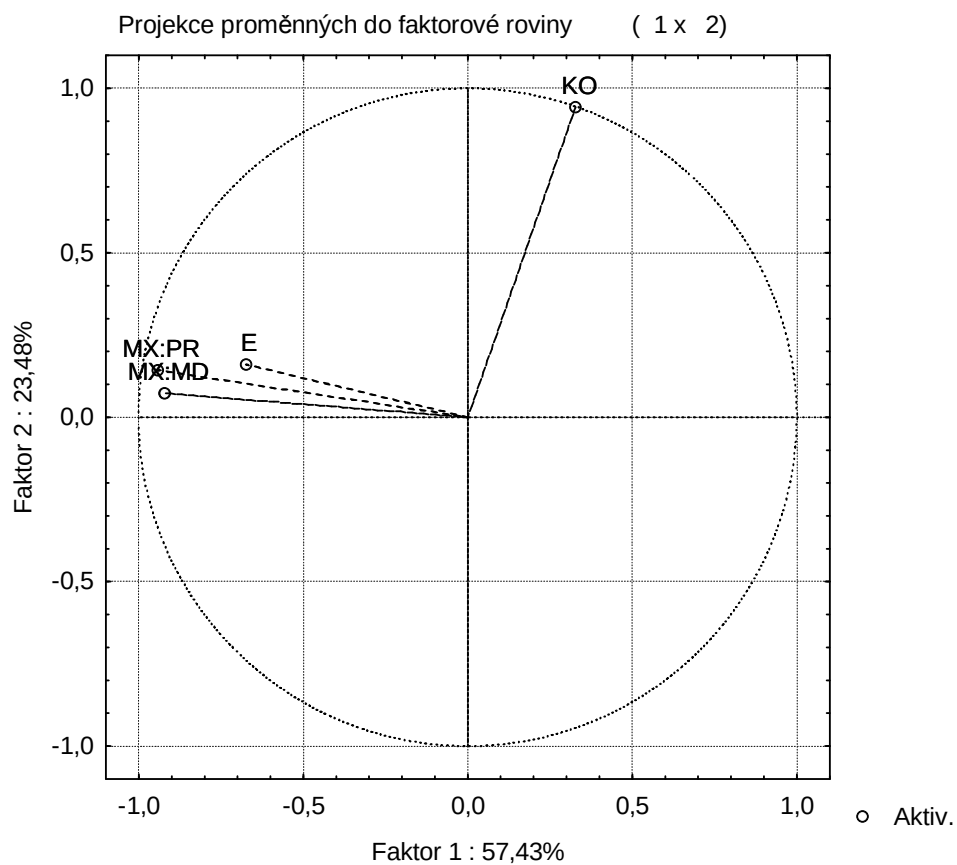
	E	KO	MX:PR	MX:MD	%KO
E	1,00	-0,12	0,49	0,40	0,56
KO	-0,12	1,00	-0,16	-0,21	-0,17
MX:PR	0,49	-0,16	1,00	0,91	0,19
MX:MD	0,40	-0,21	0,91	1,00	0,12
%KO	0,56	-0,17	0,19	0,12	1,00

Byl proveden také pokus agregovat těchto pět vlastností do dvou nových pomocí analýzy hlavních komponent. Jak je ale vidět z obrázku 16, první z nových faktorů vysvětluje původní vlastnosti ze 49,26% a druhý z 23,05%, oba dohromady tedy z 70,31%. Je to tedy výrazně horší výsledek než pro jednotlivé typy úloh, a proto se jím nebudeme dále zabývat. Dal se ovšem očekávat vzhledem k tomu, že počet příkladů byl podstatně vyšší a také původních vlastností bylo o jednu více.

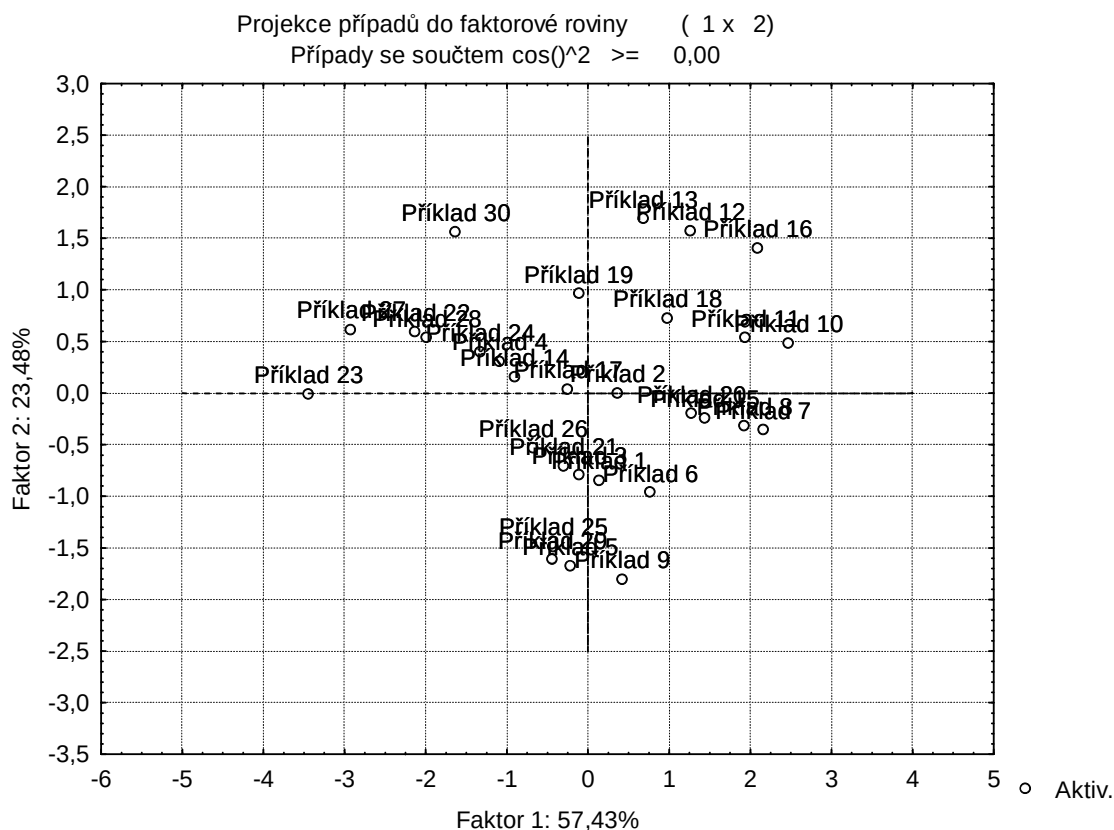


Obrázek 16 Výsledky analýzy hlavních komponent – projekce proměnných do faktorové roviny

Vzhledem k tomu, že nově přidaná vlastnost – poměr mezi počtem míst na konvexním obalu a celkovým počtem necentrálních míst – neměla podle dosud provedených analýz žádný vliv na kvalitu získaného řešení pro žádnou z testovaných metod, byl ještě podobný pokus o agregaci pomocí analýzy hlavních komponent proveden pro (původní) čtyři vlastnosti bez této nově přidané (tj. pro stejnou čtveřici jako u jednotlivých typů příkladů). Tento pokus už dopadl lépe. Jak je vidět z obrázku 17, tentokrát první faktor vysvětluje tyto čtyři vlastnosti z 57,43%, druhý z 23,48%, tj. oba dohromady z 80,91%. Hodnocení jednotlivých příkladů podle těchto nových faktorů (komponentní skóre) je graficky znázorněno na obrázku 18 a pomocí korelačních koeficientů mezi původními vlastnostmi a novými faktory z tabulky 57 lze vypočítat i jeho numerické hodnoty uvedené v tabulce 58.



Obrázek 17 Výsledky analýzy hlavních komponent – projekce proměnných do faktorové roviny



Obrázek 18 Výsledky analýzy hlavních komponent – projekce případů do faktorové roviny

Tabulka 57 Korelace vybraných dvou hlavních komponent a původních vlastností

	E	KO	MX:PR	MX:MD
Faktor 1	-0,68	0,33	-0,94	-0,92
Faktor 2	0,16	0,94	0,14	0,07

Tabulka 58 Komponentní skóre

	Faktor 1	Faktor 2
Příklad 1	0,09	-0,87
Příklad 2	0,24	0,00
Příklad 3	-0,07	-0,82
Příklad 4	-0,72	0,32
Příklad 5	-0,14	-1,73
Příklad 6	0,51	-1,00
Příklad 7	1,42	-0,37
Příklad 8	1,27	-0,33
Příklad 9	0,28	-1,86
Příklad 10	1,63	0,50
Příklad 11	1,28	0,55
Příklad 12	0,84	1,62
Příklad 13	0,45	1,74
Příklad 14	-0,60	0,16
Příklad 15	0,95	-0,25
Příklad 16	1,38	1,45
Příklad 17	-0,16	0,04
Příklad 18	0,65	0,75
Příklad 19	-0,08	0,99
Příklad 20	0,84	-0,21
Příklad 21	-0,20	-0,73
Příklad 22	-1,40	0,61
Příklad 23	-2,27	-0,01
Příklad 24	-0,88	0,41
Příklad 25	-0,28	-1,53
Příklad 26	-0,45	-0,55
Příklad 27	-1,93	0,63
Příklad 28	-1,31	0,55
Příklad 29	-0,29	-1,67
Příklad 30	-1,08	1,61

Ke zjištění závislosti dosažených výsledků na dvou nových vlastnostech úlohy získaných analýzou hlavních komponent byla opět provedena regresní analýza. Její parametry (koeficienty) jsou uvedeny v tabulce 59 a p-hodnoty v tabulce 60.

Tabulka 59 Parametry regresní analýzy

	Celkový čas rozvozu			Celkový čas jízdy		
	MNS	MS	HF	MNS	MS	HF
abs.člen	0,0220	0,0250	-0,0470	0,0249	0,0422	-0,0671
Faktor 1	-0,0047	0,0068	-0,0021	-0,0068	0,0097	-0,0030
Faktor 2	0,0223	-0,0082	-0,0141	0,0101	0,0038	-0,0139

Tabulka 60 p-hodnoty regresní analýzy

	Celkový čas rozvozu			Celkový čas jízdy		
	MNS	MS	HF	MNS	MS	HF
abs.člen	0,0374	0,0458	0,0002	0,0067	0,0013	0,0000
Faktor 1	0,6487	0,5790	0,8480	0,4390	0,4251	0,7426
Faktor 2	0,0384	0,5071	0,2055	0,2505	0,7520	0,1307
celkově	0,1030	0,6850	0,4343	0,3818	0,6881	0,2971

Tučně vyznačených p-hodnot menších než 0,05 je sice tentokrát v tabulkách hodně, ale téměř všechny jsou u absolutních členů, a tak nemají žádný praktický význam. Jediná, která je u lineárního členu, je u faktoru 2 u metody nejbližšího souseda pro celkový čas rozvozu a značí, že ten vypočte tato metoda dobrý pro úlohy s nízkou hodnotou tohoto faktoru. Přitom bude často dosahovat i slušný celkový čas jízdy (p-hodnota 0,25). V opačném případě při vysoké hodnotě faktoru 2 si povede nejlépe aplikace Habrových frekvencí (i když zde není závislost tak silná), a to spíše z hlediska celkového času jízdy.

Faktor 1 není pro výběr vhodné metody nikterak užitečný, regresní analýza neobjevila žádný jeho vliv na chování metod.

8 Kapacitně omezený víceokruhový okružní dopravní problém

Kapacitní omezení jsou snad ještě častější příčinou, proč je třeba přepravu rozdělit do více okruhů, než omezení časová, na něž byla zaměřena předchozí kapitola. Nejčastěji jsou způsobena tím, že kapacita vozidla nestačí pokrýt požadavky všech míst na množství materiálu, které je tam/odtud třeba rozvézt/svézt. Tato kapitola se opět soustředí na nejjednodušší možný případ. Předpokládáme, že všechna vozidla jsou stejná, tedy zejména mají všechna danou stejnou kapacitu, která je menší než celkový objem požadavků všech necentrálních míst, jehož přepravu do centrálního místa je třeba realizovat. Je tedy třeba naplánovat několik okruhů (každý pro jedno vozidlo) tak, aby každý procházel (tj., jinak řečeno, začínal a končil) v centrálním místě, suma kapacit (požadavků) všech necentrálních míst, která se na něm nacházejí, přitom nesmí být větší než kapacita vozidla a každé necentrální místo musí ležet právě na jednom okruhu (do každého necentrálního místa musí některé vozidlo zajet, ale je zbytečné, aby tam jezdilo více vozidel). Poněkud více exaktní definice této verze víceokruhového okružního dopravního problému (VODP) je uvedena v kapitole 6.1.

8.1 Další metody pro kapacitně omezený víceokruhový problém

Na úvod této kapitoly je opět uvedeno několik nově navržených metod pro řešení studovaného problému.

8.1.1 Fernandez de la Vega - Luekerova metoda

Jak použít Fernandez de la Vega - Luekerovu (FVL) metodu, originálně určenou pro bin packing problem, pro VODP je naznačeno v 6.1.2. Připomeňme, že bin packing problem je úloha rozmístit dané prvky, z nichž každý má určitou váhu, do minimálního počtu skupin („košů“ – „bins“) dané váhové kapacity. V aplikaci na VODP jsou těmito prvky jednotlivá místa, jejich vahami jsou kapacity a „koše“ představují skupiny míst vybraných pro jednotlivé trasy (vozidla). Pro VODP budou použity dvě verze lišící se způsobem zařazení míst s malými kapacitami do jednotlivých tras na konci výpočtu (velké kapacity rozmisťuje FVL metoda nejdříve, a to vždy skutečně optimálním způsobem). Při první z nich, kterou budeme nazývat **vzdálenostně zaměřená FVL metoda**, jsou tato místa vybírána od nejvzdálenějšího od centrálního (podobně jako v Mayerově metodě) a každé je přidáno do toho z okruhů, kam to ještě umožňuje kapacita vozidla, a který obsahuje nejbližší z dosud zařazených měst. Druhá

verze bude **kapacitně zaměřená FVL metoda**. Okruhy sestavené z míst s většími kapacitami se nejprve seřadí sestupně podle sumy kapacit a místa s malými kapacitami rovněž sestupně podle svých kapacit. Ta se pak v tomto pořadí zařazují, každé z nich vždy do prvního okruhu podle uvedeného pořadí, jak to kapacity umožní.

Podrobnosti o modifikacích FVL metody pro VODP lze najít v [84], [85], [86] a [87].

8.1.2 Metoda výhodnostních čísel

Pro VODP zde bude aplikována a testována nelimitovaná paralelně postupující verze (názvosloví viz 7.1.2, samotná metoda též viz [72], [88]):

Krok 1: Pro všechny hrany, které neincidují s centrálním uzlem, spočteme jejich výhodnostní čísla (jako v 6.2.3). Všechny tyto hrany seřadíme podle výhodnostních čísel od nejvýhodnější (s nejvyšším výhodnostním číslem) po nejméně výhodnou (s nejnižším výhodnostním číslem).

Krok 2: Zpracováváme hrany (neincidující s centrálním uzlem) v pořadí určeném v kroku 1: Jestliže po přidání hrany tvoří všechny dosud přidané hrany množinu vrcholově disjunktních cest a pro každou z těchto cest suma kapacit míst na nich ležících nepřekračuje kapacitu vozidla, přidáme hranu k řešení. Opakujeme, dokud každé místo kromě centrálního neleží na některé cestě a spojením libovolných dvou těchto cest není překročena kapacita vozidla.

Krok 3: Nakonec připojíme centrální místo ke koncovým místům všech těchto cest, a tak dostaneme cyklické trasy.

Tato metoda na rozdíl od předchozích dosud uvedených metod (6.1.1 a 8.1.1) řeší úlohu úplně, tj. nejen rozdělí místa do jednotlivých tras, ale zároveň je i v jednotlivých trasách seřadí do okruhu. Pro jednotlivé trasy už tedy pak není třeba aplikovat žádnou další metodu pro ODP.

8.1.3 Aplikace Habrových frekvencí

Pro VODP byl navržen také postup využívající Habrovy frekvence (viz 5.1.2) podobný předchozí metodě 8.1.2 pracující s výhodnostními čísly ([72], [78], [88]). Podobně jako v případě ČORP (viz 7.1.3) jsou i u VODP hrany incidentní s centrálním uzlem důležitější (objevují se v řešení častěji) než ostatní, a tak je i zde zapotřebí tuto důležitost posoudit.

Předpokládejme, že bude použito p vozidel (okruhů). V náhodně vybraném řešení s p okruhy (s rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti a bez ohledu na sazby), bude pro

každou (přímou) trasu mezi dvěma necentrálními místy pravděpodobnost, že bude obsažena v řešení, $\frac{n-p}{n(n-1)}$, zatímco pro trasu z/do centrálního místa bude tato pravděpodobnost p/n (n značí počet necentrálních míst a trasy uvažujeme orientované). Trasy z/do centrálního místa jsou tedy $\frac{pn-p}{n-p}$ -krát důležitější než ostatní. Proto jim přiřadíme při výpočtu Habrových frekvencí $\frac{pn-p}{n-p}$ -krát vyšší váhu a vzorec pro jejich výpočet pro VODP bude mít tvar

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (c_{ij} + c_{kl} - c_{il} - c_{kj}) + \frac{pn-p}{n-p} \sum_{m=1}^n (2c_{ij} + c_{m0} - c_{i0} - c_{mj} + c_{0m} - c_{im} - c_{0i}) .$$

Krok 1: Pro všechny hrany, které neincidují s centrálním uzlem 1, spočteme jejich Habrovy frekvence právě popsaným způsobem. Všechny tyto hrany seřadíme podle frekvencí od nejvýhodnější (s nejnižší frekvencí) po nejméně výhodnou (s nejvyšší frekvencí).

Kroky 2 a 3 potom probíhají stejným způsobem jako v předchozí metodě 8.1.2.

8.2 Typ úloh pro testování

Rozmístění míst v testovacích úlohách bylo provedeno stejně jako u 1. typu příkladů pro ČORP (viz 7.3.1), tj. centrální místo bylo ve středu kruhu, v němž bylo rozmístěno dalších 12 míst představujících „centra regionů“ získaných agregací původně celkem 20 náhodně rozmístěných míst. Těmto 20 místům byly přiřazeny kapacity nabývající hodnot od 250 do 550 jednotek po 50 jednotkách s rovnoměrnou distribucí hodnot tak, že součet všech kapacit byl 8000 jednotek. Při agregaci do regionálních center byly kapacity pro tato centra sčítány (kapacita centra představovala kapacitu celého regionu). Kapacita jednotlivých vozidel byla stanovena na 2100 jednotek. K uskutečnění rozvozu bylo tedy možno předpokládat, že bude zapotřebí 4 až 5 vozidel. Testované metody tak mohly ukázat, zda jsou schopny nalézt řešení využívající pouze 4 vozidla (tj. šetřící počet vozidel) nebo naopak budou potřebovat 5 vozidel, která ale dohromady ujedou krátkou vzdálenost.

8.3 Výsledky

Tak jako u předchozích typů bylo opět náhodně vygenerováno 10 příkladů. Byly vyřešeny Mayerovou metodou (6.1.1, v následujících tabulkách označena MM), Mayerovou metodou zaměřenou na minimalizaci počtu okruhů (značena MIMO, popsána dále), vzdálenostně zaměřenou FVL metodou (VFVL), kapacitně zaměřenou FVL metodou (KFVL

– obě verze FVL metody viz 8.1.1), metodou výhodnostních čísel (8.1.2, MVČ) a aplikací Habrových frekvencí (8.1.3, HF).

Mayerova metoda zaměřená na minimalizaci počtu okruhů se liší od originální verze tím, že pokud je nalezeno místo, které již nelze vzhledem ke kapacitě přidat k dosud vybraným místům do okruhu, hledání dalších míst pro tento okruh nekončí, ale metoda se snaží najít (podle co nejmenší vzdálenosti od některého z dosud vybraných míst) další místa s menší kapacitou, která by ještě bylo možno přidat. I když takto mohou vzniknout delší okruhy, může se nižším počtem výjezdů z centrálního místa zkrátit celková ujetá vzdálenost.

Výsledky jsou uvedeny ve dvou tabulkách. V tabulce 62 je uvedena celková ujetá vzdálenost, opět v procentické formě (100% = nejlepší dosažený výsledek), v tabulce 63 potom počet okruhů. V obou tabulkách jsou, tak jako u předchozích testů, i průměrné výsledky dosažené jednotlivými metodami.

Protože byl u úloh tentokrát sledován větší počet vlastností, celkem jedenáct, je hodnocení úloh podle nich popsáno ve zvláštní tabulce 64. První čtyři jsou stejné jako u úloh ČORP: excentricita (E), počet míst na konvexním obalu (KO), poměr mezi největší a průměrnou vzdáleností od centrálního místa (MX:PR) a poměr mezi největší vzdáleností a mediánem vzdáleností od centrálního místa (MX:MD). Jejich podrobnější popis a motivace jsou uvedeny na začátku 7.3.1.

Další vlastnosti, které jsou zde v porovnání s ČORP navíc, se týkají kapacit, a to především jejich struktury. Pro tyto účely byly kapacity rozděleny na velké a malé. Za velké jsou považovány kapacity o velikosti alespoň jedné čtvrtiny kapacity vozidla. Toto rozlišení bylo použito i při výpočtech oběma verzemi FVL metody.

První tři z vlastností charakterizující kapacitní stránku úlohy popisují jejich samotnou skladbu. Jsou to počet míst s velkými kapacitami (VK), poměr sumy velkých kapacit ku sumě malých kapacit (VK:MK) a počet míst velkými kapacitami na konvexním obalu obsluhované oblasti (VKKO). Zbývající čtyři, které se snaží vystihnout rozmístění kapacit v úloze, jsou poměr mezi největší vzdáleností a průměrnou vzdáleností míst s velkými kapacitami od centrálního místa (MX:PRV), poměr mezi největší vzdáleností místa s velkou kapacitou a průměrnou vzdáleností míst s velkými kapacitami od centrálního místa (MXV:PRV), poměr mezi největší vzdáleností a mediánem vzdáleností míst s velkými kapacitami od centrálního místa (MX:MDV) a poměr mezi největší vzdáleností místa s velkou kapacitou a mediánem vzdáleností míst s velkými kapacitami od centrálního místa (MXV:MDV).

Zkratky používané v tabulkách v této kapitole jsou shrnuty v tabulce 61.

Tabulka 61 Přehled zkratk v záhlaví tabulek pro analýzu VODP

MNS	Metoda nejbližšího souseda
MS	Metoda stromů
LMVČ	Limitovaná metoda výhodnostních čísel
NMVČ	Nelimitovaná metoda výhodnostních čísel
SMVČ	Sekvenční metoda výhodnostních čísel
HF	Aplikace Habrových frekvencí
E	Excentricita
KO	Počet míst určujících konvexní obal
MX:PR	Poměr mezi největší a průměrnou vzdáleností od centrálního místa
MX:MD	Poměr mezi největší vzdáleností a mediánem vzdáleností od centrálního místa
VK	Počet míst s velkými kapacitami
VK:MK	Poměr sumy velkých kapacit ku sumě malých kapacit
VKKO	Počet míst velkými kapacitami na konvexním obalu obsluhované oblasti
MX:PRV	Poměr mezi největší vzdáleností a průměrnou vzdáleností míst s velkými kapacitami od centrálního místa
MXV:PRV	Poměr mezi největší vzdáleností místa s velkou kapacitou a průměrnou vzdáleností míst s velkými kapacitami od centrálního místa
MX:MDV	Poměr mezi největší vzdáleností a mediánem vzdáleností míst s velkými kapacitami od centrálního místa
MXV:MDV	Poměr mezi největší vzdáleností místa s velkou kapacitou a mediánem vzdáleností míst s velkými kapacitami od centrálního místa

Tabulka 62 Porovnání řešení – ujeté vzdálenosti (nejlepší = 100%)

	MM	MMMO	VFVL	KFVL	MVČ	HF
Příklad 1	110,1%	107,2%	107,2%	107,2%	100,0%	100,0%
Příklad 2	101,2%	110,9%	134,3%	132,1%	100,0%	101,9%
Příklad 3	101,3%	108,3%	100,0%	120,4%	101,8%	101,8%
Příklad 4	106,9%	108,0%	112,4%	125,6%	104,6%	100,0%
Příklad 5	109,1%	127,6%	107,7%	112,5%	100,0%	101,6%
Příklad 6	110,8%	100,7%	110,6%	126,8%	100,0%	104,0%
Příklad 7	112,5%	117,5%	100,0%	104,9%	100,3%	100,0%
Příklad 8	118,1%	114,9%	100,0%	142,3%	105,9%	105,9%
Příklad 9	100,0%	114,7%	109,2%	113,3%	101,9%	102,5%
Příklad 10	113,9%	115,2%	120,0%	112,8%	100,0%	100,7%
Průměr	108,4%	112,5%	110,1%	119,8%	101,5%	101,8%

Tabulka 63 Počet okruhů – 2. část statistického souboru dat

	MM	MMMO	VFVL	KFVL	MVČ	HF
Příklad 1	5	4	4	4	5	5
Příklad 2	5	5	4	4	5	5
Příklad 3	5	5	5	4	5	5
Příklad 4	5	5	4	4	5	4
Příklad 5	5	5	4	4	5	5
Příklad 6	5	4	4	4	5	5
Příklad 7	5	5	4	5	5	4
Příklad 8	6	5	5	5	5	5
Příklad 9	5	5	5	4	5	5
Příklad 10	5	4	4	4	4	4
Průměr	5,1	4,7	4,3	4,2	4,9	4,7

Tabulka 64 Vlastnosti úloh – 3. část statistického souboru dat

	E	KO	MX :PR	MX :MD	VK	VK :MK	VKKO	MX :PRV	MXV :PRV	MX :MDV	MXV :MDV
Příklad 1	1,68	7	1,45	1,41	8	6,6	5	1,54	1,54	1,73	1,73
Příklad 2	1,71	8	1,46	1,39	4	5,33	2	1,66	1,44	1,57	1,36
Příklad 3	1,76	7	1,47	1,44	6	6	5	1,42	1,42	1,29	1,29
Příklad 4	2,10	8	1,58	1,52	5	5,6	4	1,58	1,58	1,56	1,56
Příklad 5	1,26	6	1,49	1,43	7	5	5	1,40	1,34	1,29	1,23
Příklad 6	1,30	7	1,44	1,29	6	5,6	2	1,67	1,57	1,60	1,51
Příklad 7	1,32	8	1,32	1,17	7	4,6	6	1,20	1,13	1,13	1,07
Příklad 8	1,52	8	1,30	1,25	5	6	4	1,25	1,25	1,19	1,19
Příklad 9	1,24	6	1,43	1,36	7	4,17	3	1,52	1,52	1,51	1,51
Příklad 10	1,66	9	1,29	1,14	6	6	5	1,27	1,21	1,12	1,06

Z testovaných metod si z hlediska délek tras (celkových ujetých vzdáleností) vedly nejlépe metoda výhodnostních čísel a aplikace Habrových frekvencí. Naopak výrazně nejhorší byla kapacitně zaměřená FVL metoda. Na druhé straně se oběma verzím FVL metody dařilo udržet nízký počet okruhů (potřebných vozidel).

Statistický soubor dat pro další analýzu obsahoval nejvyšší počet statistických znaků ze všech analýz v této práci: celkem 23. Prvních šest jsou výsledky jednotlivých metod podle celkové ujeté vzdálenosti, dalších šest výsledky podle počtu okruhů a zbývajících jedenáct hodnocení úloh podle sledovaných vlastností. Statistických jednotek je opět 10 (jednotlivé příklady). Výsledky podle ujeté vzdálenosti jsou znovu ve formě rozdílu mezi vypočtenou délkou a aritmetickým průměrem pro daný příklad a tato část statistického souboru je uvedena v tabulce 65. Jeho zbývajících části jsou potom přesně v takové formě, jako v předchozích tabulkách 63 a 64. Analýza podobná té následující, ale v omezenějším rozsahu z hlediska jak počtu testovaných metod, tak zejména počtu zkoumaných vlastností úloh, je provedena v [75]. Vzhledem k tomu, že nenašla příliš mnoho zajímavých závislostí výsledků dosažených jednotlivými metodami na vlastnostech úloh (alespoň v porovnání s analýzami pro ČORP v [90] a [91]), je jí v této práci věnována menší pozornost a pro testování byl použit pouze tento jediný typ příkladů.

Tabulka 65 Porovnání řešení – ujeté vzdálenosti (odchylka od průměru v %) – 1. část statistického souboru dat

	MM	MMMO	VFVL	KFVL	MVČ	HF
Příklad 1	4,6%	1,8%	1,8%	1,8%	-5,0%	-5,0%
Příklad 2	-10,8%	-2,2%	18,5%	16,5%	-11,8%	-10,1%
Příklad 3	-4,1%	2,5%	-5,3%	14,0%	-3,6%	-3,6%
Příklad 4	-2,5%	-1,4%	2,6%	14,6%	-4,5%	-8,8%
Příklad 5	-0,6%	16,3%	-1,9%	2,5%	-8,9%	-7,4%
Příklad 6	1,8%	-7,4%	1,6%	16,5%	-8,1%	-4,4%
Příklad 7	6,3%	11,0%	-5,6%	-0,9%	-5,2%	-5,6%
Příklad 8	3,1%	0,3%	-12,7%	24,2%	-7,5%	-7,5%
Příklad 9	-6,5%	7,2%	2,1%	6,0%	-4,7%	-4,2%
Příklad 10	3,1%	4,3%	8,7%	2,1%	-9,4%	-8,8%
Průměr	-0,5%	3,2%	1,0%	9,7%	-6,9%	-6,5%

Poznamenejme, že test normality rozdělení ji stejně jako ve všech předchozích případech opět nepotvrdil u žádného ze statistických znaků.

Aplikace regresní analýzy a interpretace jejích výsledků bude podobná jako v případě ČORP. Také u VODP jsou obě sledovaná kritéria (celková ujetá vzdálenost i počet okruhů) minimalizační, a tak také význam znamének u výsledných koeficientů při hodnocení úspěšnosti testované metody bude stejný. Vícerozměrnou regresi ovšem nebylo technicky možno použít stejným způsobem jako u ČORP vzhledem k velkému počtu sledovaných vlastností úlohy (nezávislých proměnných) a malému počtu testovacích příkladů (statistických jednotek). První myšlenka tedy byla rozdělit vlastnosti na několik skupin a provést vícerozměrnou lineární regresi podle každé z těchto skupin zvlášť. Nejpřirozenější a zároveň nejvhodnější pro přehlednou a pohodlnou interpretaci výsledků je vytvořit skupiny tak, aby každá z nich obsahovala vlastnosti tématicky si navzájem blízké. Nabízí se tedy rozdělení do tří skupin: První bude obsahovat ty vlastnosti, které nezávisí na kapacitách (a byly také sledovány u ČORP), tj. první čtyři v pořadí ze statistického souboru dat (z tabulky 64). Další skupina bude obsahovat hned následující tři vlastnosti, tj. ty, které popisují strukturu kapacit, ale nevšímají si přitom jejich rozmístění v obsluhované oblasti. Poslední skupinu budou tvořit poslední zbývajících čtyři vlastnosti charakterizující rozmístění kapacit.

U poslední skupiny vlastností se ovšem vícerozměrná regrese neukazuje jako vhodná, protože její vlastnosti jsou vzájemně velmi korelované (výsledky korelační analýzy viz dále).

Proto byla použita pouze jednorozměrná lineární regrese a pouze pro jednu z těchto vlastností, a to pro poměr mezi největší vzdáleností a průměrnou vzdáleností míst s velkými kapacitami od centrálního místa. Podle korelační analýzy by z nich totiž měla mít na kvalitu řešení dosahovaných jednotlivými metodami největší vliv.

Výsledky regresní analýzy pro první čtyři vlastnosti úlohy (excentricita, počet míst na konvexním obalu, poměr mezi největší a průměrnou vzdáleností od centrálního místa a poměr mezi největší vzdáleností a mediánem vzdáleností od centrálního místa) jsou uvedeny v tabulkách 66 a 67 (parametry) a 68 a 69 (p-hodnoty), v prvně uvedené z dvojice tabulek je vždy zachycen vliv na celkovou ujetou vzdálenost, ve druhé na počet okruhů.

Tabulka 66 Parametry regresní analýzy pro vzdálenost

	MM	MMMO	VFVL	KFVL	MVČ	HF
abs.člen	1,0068	0,1606	-1,5633	-1,1751	0,7524	0,8186
E	0,2043	-0,2148	-0,1500	-0,2996	0,2545	0,2055
KO	-0,0617	0,0236	0,0763	0,1221	-0,0799	-0,0804
MX:PR	0,1362	-0,6500	1,0975	-0,7831	0,0567	0,1427
MX:MD	-0,7973	0,7158	-0,2373	1,4627	-0,5327	-0,6112

Tabulka 67 Parametry regresní analýzy pro počet okruhů

	MM	MMMO	VFVL	KFVL	MVČ	HF
abs.člen	5,0273	-5,7000	15,3974	2,1308	0,1330	7,3075
E	-1,0750	-3,6267	1,5923	-2,1396	-1,6272	-0,7065
KO	0,3614	1,0438	-0,6081	0,6566	0,3412	-0,1167
MX:PR	-6,9853	-7,7833	-8,4500	-6,7768	-2,2947	-5,6910
MX:MD	6,7267	14,4789	2,1993	7,6025	6,0018	5,5635

Tabulka 68 p-hodnoty regresní analýzy pro vzdálenost

	MM	MMMO	VFVL	KFVL	MVČ	HF
abs.člen	0,3729	0,9110	0,4096	0,5509	0,1795	0,0361
E	0,5199	0,6072	0,7757	0,5947	0,1253	0,0553
KO	0,5172	0,8489	0,6320	0,4754	0,1124	0,0229
MX:PR	0,8508	0,5083	0,3881	0,5520	0,8673	0,4916
MX:MD	0,4278	0,5849	0,8851	0,4163	0,2734	0,0645
celkově	0,6258	0,7346	0,7266	0,8448	0,4213	0,0882

Tabulka 69 p-hodnoty regresní analýzy pro počet okruhů

	MM	MMMO	VFVL	KFVL	MVČ	HF
abs.člen	0,3270	0,4644	0,0774	0,7274	0,9771	0,3333
E	0,4551	0,1396	0,4606	0,2534	0,2540	0,7331
KO	0,4062	0,1531	0,3560	0,2442	0,4092	0,8505
MX:PR	0,0735	0,1667	0,1283	0,1396	0,4706	0,2675
MX:MD	0,1666	0,0753	0,7388	0,2028	0,1894	0,4058
celkově	0,3292	0,3541	0,3062	0,2509	0,2676	0,2852

p-hodnoty menší než 0,05 (vyznačené v tabulkách tučně) se vyskytují pouze v analýze celkové ujeté vzdálenosti u aplikace Habrových frekvencí a mimo absolutní člen, který nemá pro analýzu praktický význam, pouze u počtu míst na konvexním obalu obsluhované oblasti. Tato metoda je tedy velmi vhodná pro úlohy obsahující velký počet takových míst. Další jen o málo větší p-hodnoty uvádějí, že aplikace Habrových frekvencí si značně dobře povede také pro úlohy s malou excentricitou a vysokým poměrem mezi největší vzdáleností a mediánem vzdáleností od centrálního místa.

Jedinou další metodou, u které se v analýze celkové ujeté vzdálenosti vyskytují p-hodnoty, které ještě stojí za zmínku, je metoda výhodnostních čísel. Ty ovšem ukazují na přesně stejné vlastnosti jako u aplikace Habrových frekvencí, kde je ale závislost vzhledem k nižší p-hodnotě významnější, a tak aplikace Habrových frekvencí by měla pracovat spolehlivěji.

Pro žádnou z verzí Mayerovy ani FVL metody žádnou závislost vypočtené celkové délky trasy na těchto vlastnostech regresní analýza nenašla.

Stejně tak nezjistila ani závislost vypočtené celkové délky trasy na poměru mezi největší a průměrnou vzdáleností od centrálního místa pro žádnou z metod.

V analýze počtu okruhů není žádná p-hodnota menší než 0,05, ale vyskytuje se zde dosti velký počet p-hodnot od 0,07 a budeme si všímat těch, které jsou do cca 0,3. Bohužel u každé z vlastností ukazují, že všechny metody, jejichž výsledek na dané vlastnosti nějak závisí, se hodí pro stejné úlohy. V následujícím přehledu případů, pro které jsou některé z metod vhodné, jsou vždy metody seřazeny podle míry vhodnosti tak, že jako první je uvedena ta nejvhodnější a za ní postupně následují metody méně vhodné.

Pro úlohy s vysokým poměrem mezi největší a průměrnou vzdáleností od centrálního místa lze doporučit Mayerovu metodu (originální verzi), vzdálenostně i kapacitně zaměřenou verzi FVL metody, Mayerovou metodou zaměřenou na minimalizaci počtu okruhů a do určité míry i aplikaci Habrových frekvencí.

Pokud sledujeme poměr mezi největší vzdáleností a mediánem vzdáleností od centrálního místa, vedou si metody, u nichž má vliv na nalezený počet okruhů, dobře, pokud je tento poměr naopak nízký. Konkrétně to jsou Mayerova metoda zaměřená na minimalizaci počtu okruhů i její originální verze, metoda výhodnostních čísel a kapacitně zaměřená verze FVL metody.

K nalezení řešení s malým počtem okruhů pro úlohy s velkou excentricitou je vhodná Mayerova metoda zaměřená na minimalizaci počtu okruhů a částečně také kapacitně zaměřená verze FVL metody a metoda výhodnostních čísel.

A konečně pro úlohy s malým počtem míst na konvexním obalu je pro stejný účel nejvhodnější rovněž Mayerova metoda zaměřená na minimalizaci počtu okruhů, případně lze vyzkoušet i kapacitně zaměřenou verzi FVL metody.

Další tři vlastnosti, pro které byla provedena další vícerozměrná lineární regresní analýza, se týkají struktury kapacit. Jedná se o počet míst s velkými kapacitami, poměr sumy velkých kapacit ku sumě malých kapacit a počet míst s velkými kapacitami na konvexním obalu obsluhované oblasti. Analýza byla opět zaměřena jak na celkovou vzdálenost (parametry regresní analýzy viz tabulka 70, p-hodnoty viz tabulka 72), tak na počet okruhů, které jednotlivé metody dosáhly (parametry viz tabulka 71, p-hodnoty viz tabulka 73).

Tabulka 70 Parametry regresní analýzy pro vzdálenost

	MM	MMMO	VFVL	KFVL	MVČ	HF
abs.člen	-0,3039	0,1516	0,1728	0,2979	-0,1531	-0,1654
VK	0,0165	0,0082	-0,0070	-0,0460	0,0100	0,0183
VK:MK	0,0232	-0,0575	0,0011	0,0334	-0,0009	0,0007
VKKO	0,0169	0,0363	-0,0304	-0,0228	0,0053	-0,0053

Tabulka 71 Parametry regresní analýzy pro počet okruhů

	MM	MMMO	VFVL	KFVL	MVČ	HF
abs.člen	5,1434	8,0616	4,8354	5,0978	5,3471	3,7374
VK	-0,1025	-0,2672	-0,0275	-0,1354	0,0445	0,1932
VK:MK	0,0791	-0,4472	-0,0671	-0,1482	-0,0801	0,1562
VKKO	0,0360	0,1764	0,0002	0,1810	-0,0680	-0,2619

Tabulka 72 p-hodnoty regresní analýzy pro vzdálenost

	MM	MMMO	VFVL	KFVL	MVČ	HF
abs.člen	0,1159	0,3120	0,6178	0,1894	0,1853	0,0666
VK	0,3748	0,5895	0,8455	0,0711	0,3873	0,0552
VK:MK	0,3716	0,0281	0,9832	0,2964	0,9534	0,9518
VKKO	0,3078	0,0279	0,3515	0,2634	0,5917	0,4616
celkově	0,2149	0,0204	0,6221	0,0448	0,5101	0,2070

Tabulka 73 p-hodnoty regresní analýzy pro počet okruhů

	MM	MMMO	VFVL	KFVL	MVČ	HF
abs.člen	0,0041	0,0005	0,0436	0,0122	0,0039	0,0470
VK	0,4230	0,0756	0,8942	0,4018	0,7291	0,2630
VK:MK	0,6507	0,0419	0,8158	0,5050	0,6555	0,5002
VKKO	0,7425	0,1578	0,9993	0,2189	0,5508	0,1053
celkově	0,7594	0,1091	0,9932	0,5919	0,8461	0,3723

Nejtěsnější závislost na těchto třech vlastnostech popisujících strukturu kapacit ukázala korelační analýza u Mayerovy metody zaměřené na minimalizaci počtu okruhů, u níž se jako u jediné mimo absolutních členů vyskytují p-hodnoty nižší než 0,5. Naznačují především, že tato metoda bude spolehlivě nacházet velmi dobrá řešení jak z hlediska celkové ujeté vzdálenosti, tak počtu okruhů pro úlohy s vysokým poměrem sumy velkých kapacit ku sumě malých kapacit. Další taková nízká p-hodnota se vyskytuje ještě u počtu velkých kapacit na konvexním obalu obsluhované oblasti při hodnocení celkové ujeté vzdálenosti, ale u úloh, kde je tento počet malý, by měla tato metoda nacházet celkem dobrá řešení i z hlediska počtu okruhů. Jen o málo vyšší p-hodnota je příslibem velmi dobrých řešení i pro úlohy s velkým počtem velkých kapacit, ale jen co se týče počtu okruhů.

Další metodou s těsnou závislostí na některé z nyní sledovaných tří vlastností je aplikace Habrových frekvencí. Zde ale se vyskytuje již jen jediná nízká p-hodnota, která je již těsně vyšší než 0,05. Ta udává, že se tato metoda bude velmi hodit naopak pro úlohy s malým počtem velkých kapacit a bude dosahovat zejména velmi dobré celkové ujeté vzdálenosti, i když počet okruhů také nebude příliš špatný. Aplikaci Habrových frekvencí lze doporučit i pro úlohy s velkým počtem velkých kapacit na konvexním obalu ve snaze o malý počet okruhů. Ve všech těchto případech se tedy tato metoda dobře doplňuje s Mayerovou metodou zaměřenou na minimalizaci počtu okruhů.

Poslední velmi nízká p-hodnota je u kapacitně zaměřené verze FVL metody, u které slibuje dosažení velmi dobré celkové doby jízdy pro úlohy s velkým počtem velkých kapacit. Další p-hodnoty pro tuto metodu jsou sice už vyšší než 0,2, ale ukazují například následující zajímavý fakt: zatímco pro úlohy s malým počtem velkých kapacit na konvexním obalu dává nižší počet okruhů, pro úlohy s velkým počtem velkých kapacit na konvexním obalu najde řešení s kratší celkovou vzdáleností. Tu lze očekávat i u úloh s nízkým poměrem sumy velkých kapacit ku sumě malých kapacit.

Ze zbývajících metod lze vkládat naději snad již jen na krátkou celkovou ujetou vzdálenost u řešení získaných originální verzí Mayerovy metody pro úlohy s malým počtem velkých kapacit na konvexním obalu. Pro vzdálenostně zaměřenou verzi FVL metody ani metodu výhodnostních čísel regresní analýza neodhalila závislost na žádné ze tří sledovaných vlastností charakterizujících strukturu kapacit.

Následuje přehled doporučení, jak vybrat metodu pro úlohu s danou vlastností.

Pro úlohy s malým počtem velkých kapacit je jednoznačnou volbou aplikace Habrových frekvencí. Při jejich velkém počtu je vhodná kapacitně zaměřená verze FVL

metody k dosažení krátké celkové ujeté vzdálenosti a Mayerova metoda zaměřená na minimalizaci počtu okruhů pro účel, který má v názvu.

V případě vysokého poměru sumy velkých kapacit ku sumě malých kapacit se lze spolehnout na Mayerovu metodu zaměřenou na minimalizaci počtu okruhů. V opačném případě je doporučení vhodné metody mnohem obtížnější a největší šanci na slušnou celkovou ujetou vzdálenost dává kapacitně zaměřená verze FVL metody.

Při malém počtu velkých kapacit na konvexním obalu obsluhované oblasti dává nejspolehlivější výsledky opět Mayerova metoda zaměřená na minimalizaci počtu okruhů. Pokud usilujeme o malý počet okruhů, je možné vyzkoušet také kapacitně zaměřenou verzi FVL metody, řešení ale pravděpodobně nebude dobré co do celkové ujeté vzdálenosti. Tu se můžeme pokusit si zajistit ještě také originální verzi Mayerovy metody. Je-li počet velkých kapacit na konvexním obalu obsluhované oblasti naopak velký, můžeme dosáhnout malého počtu okruhů aplikací Habrových frekvencí a krátké celkové ujeté vzdálenosti nejspíše kapacitně zaměřenou verzi FVL metody, ovšem v tom případě, jak již bylo řečeno, bude horší počet okruhů.

Z regresní analýzy zbývají výsledky jednorozměrných lineárních regresí popisujících závislost výsledků jednotlivých metod na poměru mezi největší vzdáleností a průměrnou vzdáleností míst s velkými kapacitami od centrálního místa. Vzhledem k tomu, že počet okruhů má diskrétní charakter a nabýval pouze tří různých hodnot, nebyl této analýze podroben. Ta tedy byla provedena pouze pro celkovou ujetou vzdálenost. Její parametry jsou uvedeny v tabulce 74 a p-hodnoty v tabulce 75.

Tabulka 74 Parametry regresní analýzy pro vzdálenost

	MM	MMMO	VFVL	KFVL	MVČ	HF
abs.člen	0,2933	0,3996	-0,4593	-0,1195	-0,0432	-0,0709
MX:PRV	-0,2065	-0,2515	0,3244	0,1566	-0,0224	-0,0006

Tabulka 75 p-hodnoty regresní analýzy pro vzdálenost

	MM	MMMO	VFVL	KFVL	MVČ	HF
abs.člen	0,0741	0,0610	0,0842	0,6759	0,6533	0,4025
MX:PRV	0,0678	0,0803	0,0766	0,4309	0,7334	0,9912

Žádná z p-hodnot tentokrát není menší než 0,5, ale některé jsou jen těsně nad touto hranicí. Znamená to, že obě verze Mayerovy metody (jak originální, tak zaměřená na minimalizaci počtu okruhů) dávají velmi krátkou celkovou vzdálenost pro úlohy s vysokým poměrem mezi největší vzdáleností a průměrnou vzdáleností míst s velkými kapacitami od centrálního místa, zatímco vzdálenostně zaměřená verze FVL metody v opačném případě.

Také na výsledky metod pro VODP byla aplikována rovněž korelační analýza, jejíž výsledky jsou vzhledem ke svému rozsahu (počtu statistických znaků) rozděleny do několika tabulek. V tabulce 76 jsou uvedeny korelace mezi celkovými vzdálenostmi vypočtenými pomocí jednotlivých metod. Vyskytují se zde dvě různé (tučně vyznačené) hodnoty překračující hladinu významnosti 5%. Jedna z nich ukazuje, že podle celkové vzdálenosti dávají metoda výhodnostních čísel a aplikace Habrových frekvencí dobrá (nebo naopak špatná) řešení u stejných úloh, druhá říká, že Mayerova metoda zaměřená na minimalizaci počtu okruhů a kapacitně zaměřená verze FVL metody se naopak vzájemně velmi dobře doplňují (najde-li jedna z nich dlouhé řešení, najde druhá naopak krátké). Z dalších již poněkud horších korelačních koeficientů lze například ještě vyčíst, že vzdálenostně zaměřená verze FVL metody se podobně, byť v poněkud menší míře, doplňuje s originální verzí Mayerovy metody (zajímavé je, že v obou posledně jmenovaných případech se takto doplňují stejně zaměřené metody: v prvním obě kapacitně a ve druhém vzdálenostně) a s metodou výhodnostních čísel.

Tabulka 76 Korelace mezi vzdálenostmi navzájem

	MM	MMMO	VFVL	KFVL	MVČ	HF
MM	1,00	0,17	-0,58	-0,33	0,24	0,25
MMMO	0,17	1,00	-0,26	-0,69	0,12	0,08
VFVL	-0,58	-0,26	1,00	-0,12	-0,56	-0,49
KFVL	-0,33	-0,69	-0,12	1,00	-0,22	-0,24
MVČ	0,24	0,12	-0,56	-0,22	1,00	0,72
HF	0,25	0,08	-0,49	-0,24	0,72	1,00

V tabulce 77 jsou uvedeny korelace mezi počty okruhů dosaženými jednotlivými metodami. Zajímavá je absence záporných korelačních koeficientů, která svědčí o tom, že u jednotlivých příkladů si v tomto ohledu vedly všechny metody víceméně shodně buď dobře nebo špatně (tento výsledek ovšem mohlo ovlivnit i to, že počty okruhů jsou ve statistickém souboru uvedeny v absolutních číslech a ne ve formě relativního porovnání výsledků

jednotlivých metod, jako je tomu u vzdáleností). Nejvíce se spolu shodly originální verze Mayerovy metody s kapacitně zaměřenou verzí FVL metody. Koeficienty těsně nad 0,5 ukazují, že do určité míry se ještě shodují také metoda výhodnostních čísel s Mayerovou metodou zaměřenou na minimalizaci počtu okruhů a s aplikací Habrových frekvencí, a dále originální verze Mayerovy metody se vzdálenostně zaměřenou verzí FVL metody.

Tabulka 77 Korelace mezi počty okruhů navzájem

	MM	MMMO	VFVL	KFVL	MVČ	HF
MM	1,00	0,22	0,51	0,67	0,11	0,22
MMMO	0,22	1,00	0,43	0,33	0,51	0,05
VFVL	0,51	0,43	1,00	0,22	0,22	0,43
KFVL	0,67	0,33	0,22	1,00	0,17	-0,22
MVČ	0,11	0,51	0,22	0,17	1,00	0,51
HF	0,22	0,05	0,43	-0,22	0,51	1,00

Další tabulka 78 obsahuje korelace mezi kvalitou řešení dané podle obou kritérií (celkové délky řešení a počtu okruhů). Pokud se soustředíme na jedno řešení získané jednou metodou (prvky na diagonále), největší souvislost mezi nimi je u vzdálenostně zaměřené verze FVL metody, kde řešení dobré podle jednoho z kritérií má sklon být horší podle druhého, ale absolutní hodnota korelačního koeficientu jen těsně překračuje hodnotu 0,5. Vztah mezi dvěma různými řešeními jedné úlohy získanými dvěma různými metodami, pokud hodnotíme každé z nich podle jiného z kritérií, je vidět u originální verze Mayerovy metody a kapacitně zaměřené verzí FVL metody, kde je navíc víceméně oboustranný. Další takové případy lze sledovat, pokud vzdálenostně zaměřená verze FVL metody poskytne dobré, resp. špatné řešení z hlediska celkové ujeté vzdálenosti, potom totiž kapacitně zaměřená verze FVL metody a originální verze Mayerovy metody dávají obě naopak špatná, resp. dobrá řešení podle počtu okruhů. Žádné z těchto závislostí ovšem nedosahují hladiny významnosti 5%, byť některé jen těsně.

Tabulka 78 Korelace mezi vzdálenostmi (řádky) a počty okruhů (sloupce)

	MM	MMMO	VFVL	KFVL	MVČ	HF
MM	0,25	-0,47	-0,22	0,51	-0,24	-0,36
MMMO	-0,15	0,36	0,01	0,18	-0,06	-0,14
VFVL	-0,58	-0,24	-0,51	-0,63	-0,31	-0,08
KFVL	0,63	0,24	0,40	0,15	0,31	0,36
MVČ	-0,12	0,14	0,39	0,08	0,32	-0,13
HF	-0,19	-0,15	0,41	-0,01	0,34	0,32

Následuje nejdůležitější část korelační analýzy: závislost dosažených výsledků na vlastnostech úlohy. Nejvýznamnější závislosti korelační analýza odhalila, jak je vidět z tabulky 79, u vlastností charakterizujících strukturu kapacit. Potvrdila vhodnost kapacitně zaměřené verze FVL metody pro úlohy s velkým počtem velkých kapacit, aplikace Habrových frekvencí naopak pro úlohy s malým počtem velkých kapacit a Mayerovy metody zaměřené na minimalizaci počtu okruhů pro úlohy s malým počtem velkých kapacit na konvexním obalu. Zmiňme ještě některé další závislosti, které však už nejsou významné na 5% hladině významnosti. Pro úlohy s malým počtem velkých kapacit na konvexním obalu ukázala korelační analýza také výhodnost originální verze Mayerovy metody a naopak pro případ velkého počtu velkých kapacit na konvexním obalu kapacitně zaměřené verze FVL metody. Všechny tyto výsledky prokázala již předtím i regresní analýza. Navíc oproti regresní analýze ale korelační analýza objevila, že pro úlohy s malým počtem velkých kapacit se hodí i obě verze Mayerovy metody a metoda výhodnostních čísel, byť ne tolik, jako aplikace Habrových frekvencí.

Ve zbývajících částech tabulky 79 se žádné další tučně vyznačené hodnoty svědčící o dosažení 5% hladiny významnosti nevyskytují. Všímáme-li si rozmístění míst v obsluhované oblasti (horní část tabulky), zjistíme, že korelační analýza potvrdila jako jedinou vhodnou vlastnost nalezenou regresní analýzou velký počet míst na konvexním obalu pro aplikace Habrových frekvencí. Zbýající výsledky regresní analýzy neodhalila, ale naopak naznačila, že originální verze Mayerovy metody by mohla dávat slušné výsledky pro úlohy s vysokým poměrem mezi největší vzdáleností a mediánem vzdáleností od centrálního místa a také s vysokým poměrem mezi největší a průměrnou vzdáleností od centrálního místa.

Z vlastností popisujících rozmístění kapacit podle korelační analýzy nejvíce ovlivňuje výsledky poměr mezi největší vzdáleností a průměrnou vzdáleností míst s velkými kapacitami

od centrálního místa (proto byl také jako jediný vybrán pro regresní analýzu). Při jeho vysokých hodnotách se dobře daří oběma verzím Mayerovy metody, v opačném případě vzdálenostně zaměřené verzi FVL metody, což přesně koresponduje s výsledky regresní analýzy. Korelační analýza navíc doporučuje Mayerovu metodu zaměřenou na minimalizaci počtu okruhů také pro úlohy s vysokým poměrem mezi největší vzdáleností místa s velkou kapacitou a průměrnou vzdáleností míst s velkými kapacitami od centrálního místa a s vysokým poměrem mezi největší vzdáleností a mediánem vzdáleností míst s velkými kapacitami od centrálního místa.

Tabulka 79 Korelace mezi vzdálenostmi a vlastnostmi úlohy

	MM	MMMO	VFVL	KFVL	MVČ	HF
E	-0,21	-0,45	0,26	0,29	0,13	-0,41
KO	0,24	-0,34	0,21	0,17	-0,31	-0,59
MX:PR	-0,51	-0,16	0,26	0,11	0,22	0,02
MX:MD	-0,54	-0,08	0,12	0,18	0,29	0,04
VK	0,52	0,54	-0,32	-0,78	0,51	0,67
VK:MK	0,31	-0,48	-0,04	0,27	-0,03	-0,10
VKKO	0,61	0,66	-0,48	-0,60	0,44	0,17
MX:PRV	-0,60	-0,58	0,58	0,28	-0,12	0,00
MXV:PRV	-0,45	-0,53	0,30	0,25	0,22	0,22
MX:MDV	-0,37	-0,52	0,42	0,14	0,08	0,13
MXV:MDV	-0,23	-0,45	0,20	0,11	0,33	0,28

Pro dosažený počet okruhů (viz tabulka 80) našla korelační analýza nejtěsnější závislost na rozmístění kapacit v úloze. K té ale dochází pouze u kapacitně zaměřené verze FVL metody, 5%-ní hladina významnosti je dosažena pro úlohy s vysokým poměrem mezi největší vzdáleností a průměrnou vzdáleností míst s velkými kapacitami od centrálního místa a s vysokým poměrem mezi největší vzdáleností místa s velkou kapacitou a průměrnou vzdáleností míst s velkými kapacitami od centrálního místa, ale v poněkud menší míře platí tato závislost i pro zbývající dvě vlastnosti (tj. poměr mezi největší vzdáleností a mediánem vzdáleností míst s velkými kapacitami od centrálního místa a poměr mezi největší vzdáleností místa s velkou kapacitou a mediánem vzdáleností míst s velkými kapacitami od centrálního místa). Připomeňme, že pro tento případ nebyla prováděna regresní analýza.

Další závislosti na 5%-ní hladině významnosti odhalené korelační analýzou, jsou u rozmístění míst v úloze. Pro úlohy s velkým počtem míst na konvexním obalu by měla dávat

velmi dobré řešení aplikace Habrových frekvencí a pro vysoký poměr mezi největší a průměrnou vzdáleností od centrálního místa kapacitně zaměřená verze FVL metody. Regresní analýza přitom zjistila pouze posledně jmenovanou závislost. Méně významné závislosti pro rozmístění míst našla korelační analýza ještě pro počet míst na konvexním obalu, kde doporučuje, pokud je jich hodně, metodu výhodnostních čísel, což regresní analýza ponechala bez povšimnutí, a pro poměr mezi největší vzdáleností a mediánem vzdáleností od centrálního místa, kde ve shodě s regresní analýzou doporučuje při jeho nízké hodnotě použít opět metodu výhodnostních čísel, ale při vysoké hodnotě kapacitně zaměřenou verzi FVL metody, což je v rozporu s regresní analýzou, která ji označila za vhodnou naopak pro nízkou hodnotu tohoto ukazatele. Zbývajících závislostí nalezených regresní analýzou si zde korelační analýza nepovšimla.

U zbývajících vlastností charakterizujících strukturu kapacit nejsou žádné korelace dosahující 5%-ní hladiny významnosti a i pokud výrazně slevíme z tohoto požadavku na významnost, zjistíme, že korelační analýza potvrdila pouze jeden nejvýznamnější výsledek regresní analýzy, a to vhodnost Mayerovy metody zaměřené na minimalizaci počtu okruhů pro úlohy s vysokým poměrem sumy velkých kapacit ku sumě malých kapacit

Tabulka 80 Korelace mezi počty okruhů a vlastnostmi úlohy

	MM	MMMO	VFVL	KFVL	MVČ	HF
E	-0,05	0,02	-0,12	-0,26	-0,13	-0,34
KO	0,22	-0,19	-0,29	0,33	-0,58	-0,67
MX:PR	-0,47	0,20	-0,18	-0,65	0,49	0,19
MX:MD	-0,27	0,34	0,05	-0,55	0,57	0,34
VK	-0,32	-0,33	-0,06	-0,04	0,03	0,06
VK:MK	0,24	-0,54	-0,10	-0,14	-0,24	0,08
VKKO	-0,03	0,05	-0,05	0,35	-0,23	-0,45
MX:PRV	-0,42	-0,17	-0,22	-0,71	0,37	0,40
MXV:PRV	-0,33	-0,17	-0,02	-0,69	0,42	0,40
MX:MDV	-0,33	-0,26	-0,21	-0,56	0,45	0,41
MXV:MDV	-0,25	-0,25	-0,06	-0,52	0,47	0,38

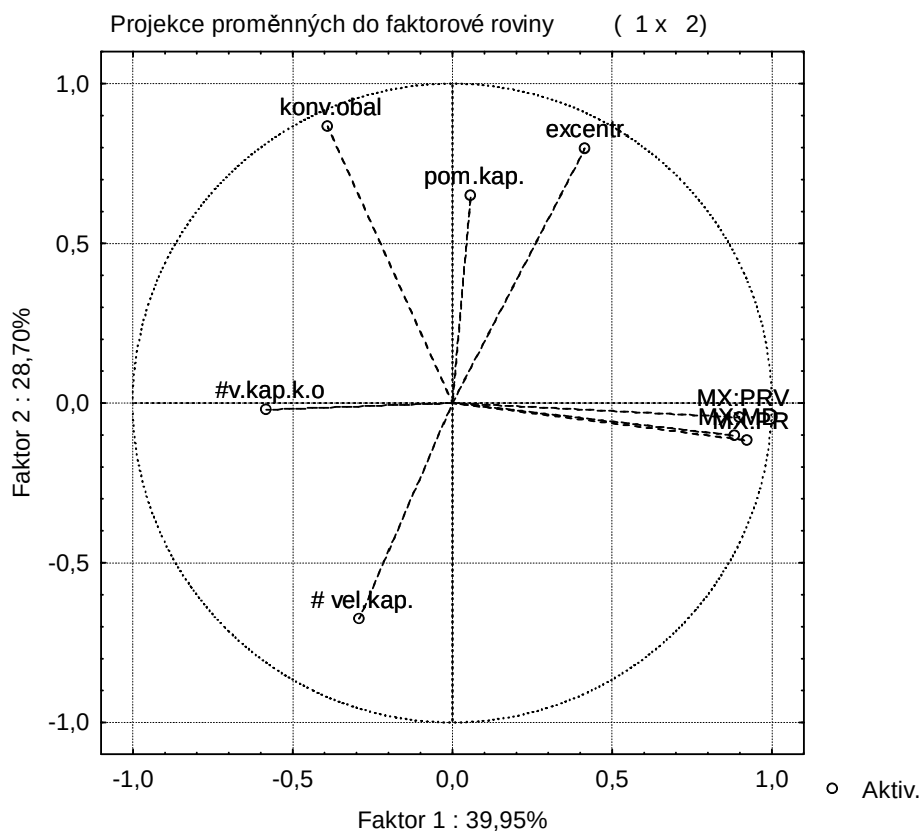
Zbývá stručný komentář k poslední části korelační analýzy zaměřené na korelace mezi jednotlivými vlastnostmi navzájem. V tabulce 81 zaujmou především vysoké hodnoty v pravé dolní části tabulky svědčící o těsné vzájemné souvislosti mezi všemi čtyřmi vlastnostmi charakterizujícími rozmístění kapacit v daném příkladu, která byla důvodem, proč regresní

analýza byla provedena pouze podle jedné z nich. V levé horní části tabulky si můžeme připomenout souvislosti mezi vlastnostmi nezáviselými na kapacitách, které již byly zmíněny při analýze metod pro ČORP v 7.3.1. Koeficienty ve zbývajících částech tabulky už ponecháváme čtenáři k analýze a zdůvodnění jejich hodnot.

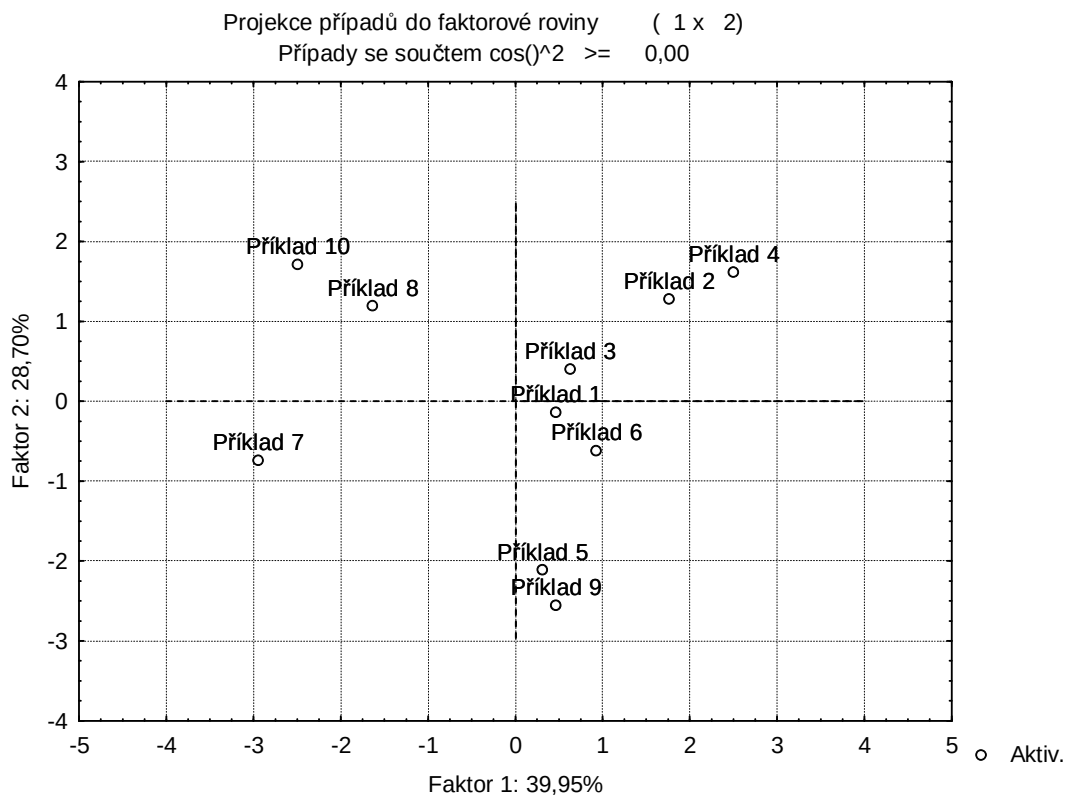
Tabulka 81 Korelace mezi vlastnostmi úlohy navzájem

	E	KO	MX :PR	MX :MD	VK	VK :MK	VKKO	MX :PRV	MXV :PRV	MX :MDV	MXV :MDV
E	1,00	0,51	0,40	0,44	-0,47	0,58	0,05	0,23	0,28	0,22	0,25
KO	0,51	1,00	-0,46	-0,51	-0,52	0,38	0,13	-0,33	-0,46	-0,37	-0,44
MX:PR	0,40	-0,46	1,00	0,94	-0,08	-0,01	-0,28	0,74	0,80	0,67	0,67
MX:MD	0,44	-0,51	0,94	1,00	-0,07	0,07	-0,18	0,63	0,73	0,62	0,66
VK	-0,47	-0,52	-0,08	-0,07	1,00	-0,10	0,54	-0,22	-0,02	0,04	0,19
VK:MK	0,58	0,38	-0,01	0,07	-0,10	1,00	0,14	0,05	0,12	0,15	0,20
VKKO	0,05	0,13	-0,28	-0,18	0,54	0,14	1,00	-0,76	-0,59	-0,57	-0,42
MX:PRV	0,23	-0,33	0,74	0,63	-0,22	0,05	-0,76	1,00	0,91	0,91	0,80
MXV:PRV	0,28	-0,46	0,80	0,73	-0,02	0,12	-0,59	0,91	1,00	0,91	0,93
MX:MDV	0,22	-0,37	0,67	0,62	0,04	0,15	-0,57	0,91	0,91	1,00	0,96
MXV:MDV	0,25	-0,44	0,67	0,66	0,19	0,20	-0,42	0,80	0,93	0,96	1,00

Také u vlastností příkladů pro VODP byl učiněn pokus agregovat je pomocí analýzy hlavních komponent do menšího počtu. Tato analýza byla aplikována na osm vlastností, pro které byla původně prováděna lineární regrese a výsledkem byly tři faktory, nichž první vysvětloval původní vlastnosti z 39,95%, druhý z 28,70% a třetí z 18,80%, všechny tři nové vlastnosti celkem tedy vysvětlovaly původních osm z 87,44%. V rovině prvních dvou faktorů jsou graficky znázorněny proměnné na obrázku 19 a komponentní skóre příkladů na obrázku 20. Korelace všech tří faktorů s původními vlastnostmi jsou uvedeny v tabulce 82 a komponentní skóre v tabulce 83.



Obrázek 19 Výsledky analýzy hlavních komponent – projekce proměnných do faktorové roviny



Obrázek 20 Výsledky analýzy hlavních komponent – projekce případů do faktorové roviny

Tabulka 82 Korelace vybraných tří hlavních komponent a původních vlastností

	E	KO	MX:PR	MX:MD	VK	VK:MK	VKKO	MX:PRV
Faktor 1	0,41	-0,39	0,92	0,88	-0,29	0,06	-0,58	0,90
Faktor 2	0,80	0,87	-0,12	-0,10	-0,68	0,65	-0,02	-0,04
Faktor 3	0,36	-0,14	0,27	0,38	0,55	0,43	0,77	-0,23

Tabulka 83 Komponentní skóre

	Faktor 1	Faktor 2	Faktor 3
Příklad 1	0,26	-0,09	1,62
Příklad 2	0,99	0,84	-1,44
Příklad 3	0,35	0,26	1,04
Příklad 4	1,40	1,06	0,64
Příklad 5	0,17	-1,40	0,67
Příklad 6	0,52	-0,41	-1,21
Příklad 7	-1,65	-0,49	0,06
Příklad 8	-0,91	0,78	-0,51
Příklad 9	0,26	-1,69	-0,79
Příklad 10	-1,40	1,13	-0,06

Zbývá zjistit pomocí regresní analýzy, jak závisí výsledky jednotlivých metod na těchto nových vlastnostech. Tato analýza byla, stejně jako v případě zkoumání závislosti na poměru mezi největší vzdáleností a průměrnou vzdáleností míst s velkými kapacitami od centrálního místa, provedena pouze pro vzdálenost, protože počet okruhů má diskrétní charakter a nabýval pouze tří různých hodnot. Výsledné parametry jsou uvedeny v tabulce 84 a p-hodnoty v tabulce 85.

Tabulka 84 Parametry regresní analýzy pro vzdálenost

	MM	MMMO	VFVL	KFVL	MVČ	HF
abs.člen	-0,0063	0,0348	0,0113	0,1076	-0,0756	-0,0718
Faktor 1	-0,0400	-0,0316	0,0377	0,0345	0,0011	-0,0016
Faktor 2	0,0006	-0,0421	0,0217	0,0437	-0,0080	-0,0159
Faktor 3	0,0224	0,0270	-0,0334	-0,0418	0,0184	0,0073

Tabulka 85 p-hodnoty regresní analýzy pro vzdálenost

	MM	MMMO	VFVL	KFVL	MVČ	HF
abs.člen	0,6792	0,0957	0,7210	0,0053	0,0002	0,0001
Faktor 1	0,0396	0,1392	0,2813	0,2425	0,9104	0,8476
Faktor 2	0,9722	0,0640	0,5207	0,1516	0,4392	0,0990
Faktor 3	0,1923	0,1968	0,3349	0,1676	0,1031	0,4058
celkově	0,1165	0,0952	0,4592	0,1794	0,3158	0,2964

Jediná p-hodnota menší než 0,05 je u originální verze Mayerovy metody a ukazuje její vhodnost pro úlohy s vysokou hodnotou faktoru 1. Pro tento případ dává (byť poněkud méně) dobrá, řešení (hodnotíme pouze z hlediska celkové ujeté vzdálenosti) i její verze zaměřená na minimalizaci počtu okruhů. Hned dvě stále ještě velmi vhodné metody (s p-hodnotami menšími než 0,1) existují pro úlohy s vysokou hodnotou faktoru 2, a to opět Mayerova metoda zaměřená na minimalizaci počtu okruhů a aplikace Habrových frekvencí. Téměř stejně dobrou p-hodnotu pro nízké hodnoty faktoru 3 má metoda výhodnostních čísel, za níž v tomto případě poněkud zaostávají obě verze Mayerovy metody, ale stále může stát zato vyzkoušet i je. Pro nízké hodnoty faktoru 2 a také pro vysoké hodnoty faktoru 3 je nejlepší kapacitně zaměřená verze FVL metody. Nejtěžší je rada pro výběr metody pro úlohy s nízkou hodnotou faktoru 1, zde je snad nejlepší použít některou z verzí FVL metody.

9 Závěr

Práce se zabývala víceokruhovými okružními dopravními úlohami. Zaměřila se na dva nejjednodušší a v praxi se často vyskytující typy: časově omezený rozvozní problém (ČORP) a víceokruhový okružní dopravní problém (VODP) omezený kapacitně. Pro obě tyto úlohy bylo navrženo několik nových metod řešení a společně s některými dalšími metodami známými z literatury byly vyzkoušeny na malém souboru testovacích příkladů vytvořeném speciálně pro tuto práci. Výsledky metod byly vyhodnoceny jednak celkově (zda si daná metoda vedla všeobecně dobře či hůře), jednak v závislosti na určitých vytipovaných vlastnostech úlohy. Ve snaze popsat tyto závislosti co nejlépe byly použity různé způsoby statistických analýz.

Pro ČORP byly testovány z metod publikovaných v jiné literatuře metoda nejbližšího souseda a (sekvenční) metoda výhodnostních čísel, z nově vytvořených metod potom metoda stromů, další dvě paralelně postupující verze metody výhodnostních čísel a aplikace Habrových frekvencí. K testování byly použity celkem tři typy příkladů. Příklady stejného typu se vždy shodovaly ve velikosti dat (počtu míst, která bylo třeba objet) a způsobu generování, v dalších několika sledovaných vlastnostech se lišily. Příklady 1. typu byly vyřešeny všemi šesti uvedenými metodami. Ukázalo se, že všechny tři verze metody výhodnostních čísel daly vždy buď přesně stejný nebo horší výsledek než aplikace Habrových frekvencí, a tak byly z dalšího testování vyřazeny a zbývající dva typy příkladů byly řešeny pouze ostatními třemi metodami, tj. metodou nejbližšího souseda, metodou stromů a aplikací Habrových frekvencí. Uvedme stručně, jak se jednotlivé typy příkladů lišily mezi sebou: 2. typ příkladů se lišil od prvního větší velikostí (vyšším počtem míst), 3. typ umístěním centrálního místa (stanoviště) na okraji oblasti, kde rozvoz probíhal. Použití tohoto postupu umožnilo odhalit zajímavý fakt, že metoda stromů dává nejlepší výsledky pro úlohy se středně velkou excentricitou (tato vlastnost charakterizuje, kde v oblasti, v níž probíhá rozvoz, je umístěno centrální místo – čím dále od jejího středu, tím je excentricita větší), pouze za použití lineární regrese. Metoda nejbližšího souseda naopak dosahovala dobrých výsledků u úloh s extrémními hodnotami excentricity, konkrétně při velké excentricitě u malých úloh (3. typ), ale u velkých úloh (2. typ) při malé excentricitě (bohužel nebyly provedeny testy na velkých úlohách s velkou excentricitou). V ostatních případech, pokud byla prokázána závislost kvality řešení na sledovaných vlastnostech úlohy, byla vždy monotónní. Podrobné výsledky jsou uvedeny v kapitole 7. Jejich porovnáním pro jednotlivé typy příkladů lze ovšem vyvodit několik následujících zajímavých závěrů: Závislost kvality výsledků, které metody

dosahují, na jednotlivých vlastnostech se ukazuje být méně těsná s rostoucí velikostí dat. Při nízké excentricitě dochází k větším rozdílům mezi celkovou („průměrnou“) úspěšností jednotlivých metod. Při velkém počtu míst nebo velké excentricitě se naopak jako výhodné ukazuje to, že se uvedené tři metody vzájemně velmi dobře doplňují bez ohledu na vlastnosti konkrétní úlohy, tj. pokud použijeme dvě z nich, jedná dá vysokou pravděpodobností velmi dobré řešení. Zejména to platí o metodě stromů, která se takto doplňuje s každou z obou zbývajících metod, tj. jak s metodou nejbližšího souseda, tak s aplikací Habrových frekvencí. Byl také učiněn pokus agregovat všechny sledované vlastnosti pomocí analýzy hlavních komponent do pouze dvou nových tak, aby co nejlépe charakterizovaly úlohy podle všech původních vlastností. Závislost výsledků jednotlivých metod na takto získaných vlastnostech ale byla v obecném případě, a zejména u velkých úloh relativně nízká (poněkud lepší situace byla pouze speciálně pro některé typy úloh).

Z metod pro VODP z jiné literatury byla vybrána Mayerova metoda a z nově navržených metod byla porovnávána s jednou její další modifikací, se dvěma různými úpravami Fernandez de la Vega - Luekerovy metody originálně určené pro tzv. bin packing problem, a dále s metodou výhodnostních čísel (nelimitovanou, paralelně postupující) a aplikací Habrových frekvencí. Vzhledem k tomu, že analýza tohoto typu úloh provedená v [75], ale na omezenějším počtu testovaných metod a sledovaných vlastností úloh, nenašla příliš mnoho zajímavých výsledků, byl v této práci testován menší a méně pestrý (v porovnání s ČORP) soubor příkladů obsahující pouze jediný typ (odpovídající 1. typu u ČORP). Výsledky této práce potvrzují závěry [75], zároveň ale ukazují, že výběr metod a vlastností v [75] nebyl dobrý a u některých, které tam nebyly testovány, určité závislosti existují (konkrétně u metody výhodnostních čísel a aplikace Habrových frekvencí). Dále se podařilo pomocí analýzy hlavních komponent agregovat sledované vlastnosti do tří nových, na nichž byla zjištěna dosti významná závislost výsledků jednotlivých metod. Není však zcela jasné, zda by se podobná závislost potvrdila i pro rozsáhlejší a podobně různorodý soubor příkladů, jako byl použit pro ČORP.

Testovacím souborům úloh lze vytknout jejich malou velikost (malý počet příkladů) a omezený počet typů příkladů, i když u jednotlivých typů je motivace jejich výběru vysvětlena existencí poměrně častých a obecných praktických situací, kde by se mohly objevit. Zpracování jejich většího počtu by však výrazně překročilo nároky na požadovaný rozsah disertační práce, a proto k němu nebylo přistoupeno. Bezesporně důležitá je tak především metodická stránka přínosu této práce. Navíc při snaze o generování velkého množství

příkladů s co nejširší škálou různých vlastností by u některých z nich mohla být sporná jejich praktická existence.

U obou studovaných typů úloh se nově navržené metody ukázaly být přínosným obohacením komplexu metod již existujících a publikovaných, neboť většinou dávaly lepší řešení než metody již dříve jinde publikované a mnohdy u nich byla také zjištěna významnější závislost jeho kvality na některých vlastnostech úlohy, což umožňuje předem posoudit, zda je pro konkrétní úlohu vhodné danou metodu použít. Získané poznatky mohou pomoci jak řešitelům konkrétních úloh, tak při tvorbě obecněji fungujících systémů pro podporu rozhodování.

Literatura

- [1] Aras, N., Altinel, I.K., Oommen, J.: A Kohonen-like Decomposition Method for the Euclidean Traveling Salesman Problem – KNIES/DECOMPOSE, *Neural Networks*, 4, 2003, s.869-890
- [2] Applegate, D.L., Bixby, R.E., Chvátal, V., Cook, W.J.: *The Traveling Salesman Problem: A Computational Study*, Princeton University Press, 2006.
- [3] Applegate, D.L., Cook, W., Rohe, A.: Chained Lin-Kernighan for Large Traveling Salesman Problems, *INFORMS Journal of Computing*, 15, 2003, s.82-92
- [4] Arora, S.: Polynomial-time Approximation Schemes for Euclidian TSP and Other Geometric Problems, *J. Assoc. Comp. Math.*, 45(5), 1998, s.753-782
- [5] Bertazzi, L., Paletta, G., Speranza, M.G.: An Improved Heuristic for the Period Traveling Salesman Problem, *Computers and Operations Research*, 8, 2004, s.1215-1222
- [6] Blum, A., Chalassani, P., Vempala, S.: A Constant-factor Approximation for the k -MST Problem in the Plane, In: *Proc. 27th ACM STOC*, 1995
- [7] Borůvka, O.: O jistém problému minimálním, *Práce moravské přírodovědecké společnosti*, 3, sv.3, 1926, s.37-38
- [8] Chen, Y., Zhang, P.: Optimized Annealing of Traveling Salesman Problem from the n -th-nearest-neighbor Distribution, *Physica A: Statistical and Theoretical Physics*, 2, 2006, s.627-632
- [9] Christofides, N.: *Graph Theory: An Algorithmic Approach*, Academic Press, 1975
- [10] Christofides, N.: Worst-case Analysis of a New Heuristic for the Traveling Salesman Problem, Technical Report CS-93-13, Carnegie Mellon University, 1976
- [11] Clarke, G., Wright, J.W.: Scheduling of Vehicles from a Central Depot to a Number of Delivery Points, *Oper. Res.*, 12, 1964, s.568-581
- [12] Cook, S.A.: The Complexity of Theorem Proving Procedures, *3rd STOC*, 1971, s.151-158
- [13] Cornuélois, G., Nemhauser, G.L.: Tight Bounds for Christofides' Traveling Salesman Heuristic, *Math. Prog. Ser. A*, 14, 1978, s.116-121
- [14] Croes, G.A.: A method for solving traveling salesman problems, *Operations Research*, 6, 1958, s.791-812
- [15] Deineko, V.G., Hoffmann, M., Okamoto, Y., Woeginger, G.J.: The Traveling Salesman Problem with Few Inner Points. *Oper. Res. Lett.* 1, 2006, s.106-110
- [16] Dong-hai, Z., Fan, J.: Solving Traveling Salesman Problem with Nested Queue-jumping Algorithm, *Information Technology Interfaces*, 2003, s.537-542
- [17] Du D.Z., Hwang, F.K.: A Proof of Gilbert- Pollak's Conjecture on the Steiner Ratio, *Algorithmica*, 7, 1992, s.121-135
- [18] Edmonds, J.: Paths, Trees and Flowers, *Canad. J. Math.*, 17, 1965, s.449-467
- [19] Edmonds, J., Johnson, J., Ellis, L.: Matching, Euler Tours and the Chinese Postman, *Math. Prog.*, 5, 1973, s.88-124

- [20] Fernandez de la Vega, W., Lueker, D.S.: Bin Packing Problem Can Be Solved within $1+\epsilon$ in Linear Time, *Combinatorica*, 1, 1981, s.349-355
- [21] Fotr, J., Dědina, J., Hrůzová, H.: *Manažerské rozhodování*, Ekopress, Praha, 2003
- [22] Frieze, A.M., Galbiati, G., Maffioli, F.: On the Worst-case Performance of Some Algorithms for the Assymetric Traveling Salesman Problem, *Networks*, 12, 1982, s.23-39
- [23] Frieze, A.M., Sorkin, G.B.: The Probabilistic Relationship between the Assignment Problem and Assymetric Traveling Salesman Problem, 12th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA), 2001, s.652-660
- [24] Gamboa, D., Rego, C., Glover, F.: Implementation Aanalysis of Efficient Heuristic Algorithms for the Traveling Salesman Problem, *Computers and Operations Research*, 4, 2006, s.1154-1172
- [25] Gibbons, A.: *Algorithmic Graph Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985
- [26] Gilbert, E.N., Pollak, R.O.: Steiner Minimal Trees, *SIAM J. Appl. Math.*, 16, 1968, s.1-29
- [27] Glover, F., Gutin, G., Yeo, A., Zverovich, A.: Construction Heuristics and Domination Analysis for the Assymetric TSP, *European Journal of Operational Research*, 129, 2001, s.555-568
- [28] Gorry, G.A., ScottMorton, M.S.: A Framework for Management Information Systems, *Sloan Management Review*, 13, 1971, s.55-70
- [29] Gutin, G., Punnen, A.P.: *The Traveling Salesman Problem and Its Variations*, Springer, 2006
- [30] Gutin, G., Yeo, A., Zverovich, A.: Traveling Salesman Should not Be Greedy: Domination Analysis of Greedy Type Heuristics for the TSP, *Discrete Applied Mathematics*, 117, 2002, s.81-86
- [31] Habr, J.: *Jednoduché optimalizační metody pro ekonomickou praxi*, SNTL, Praha, 1964
- [32] Habr, J.: *Prognostické modelování v hospodářské praxi*, SNTL, Praha, 1976
- [33] Haist, T., Osten, W.: An Optical Solution For the Traveling Salesman Problem, *Optics Express*, 16, 2007, s.10473-10482
- [34] Helsgaun, K.: An Effective Implementation of Lin-Kernighan Traveling Salesman Heuristic, *European Journal of Operational Research*, 1, 2000, s.106-130
- [35] Hjertenes, Ø. M.: *A Multilevel Scheme for the Traveling Salesman Problem*, University of Bergen, 2002
- [36] Jarník, V.: O jistém problému minimálním, *Práce moravské přírodovědecké společnosti*, 4, 1930, s.57-63
- [37] Kanellakis, P.C., Papadimitriou, C.H.: Local Search for the Asymmetric Traveling Salesman Problem, *J. Oper. Res.*, 28(5), 1980, s.1086-1089
- [38] Karp, R.M.: Reducibility, among Combinatorial Problems, In: *Complexity of Computes Computations*, Plenum Pres, New York, 1972, s.85-104
- [39] Karp, R.M.: A Patching Algorithm for the Non-symmetric Traveling Salesman Problem, *SIAM J. Comput.*, 8, 1979, s.561-573

- [40] Khuller, S., Raghavachari, B., Young, N.: Low Degree Spanning Tree of Small Weight, In: Proc. 26th ACM STOC, 1994
- [41] König, D.: Graphs and Matrices, Matematikai Fizikai Lapok, 38, 1931, s.116-119
- [42] Korte, B., Vygen, J.: Combinatorial Optimization, Springer, 2000
- [43] Kruskal, J.B.Jr.: On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem, Proc. Amer. Math. Soc, 7, 1957, s.48-50
- [44] Kuan, M-K.: Graphic Programming Using Odd or Even Points, Chinese Math., 1, 1962, s.273-277
- [45] Kučera, L.: Kombinatorické algoritmy, SNTL, Praha, 1983
- [46] Lawler, E.L., Lenstra, J.K., Rinnoy Kan, A.H.G., Shmoys, D.B.: The Traveling Salesman Problem, John Wiley & Sons Ltd., 1985
- [47] Lin, S.: Computer Solutions of the Traveling Salesman Problem, Bell Syst. Tech. J., 44, 1965, s.2245-2269
- [48] Lin, S., Kernighan, B.V.: An Effective Heuristic Algorithm for the Traveling Salesman Problem, Oper. Res., 21, 1973, s.972-989
- [49] Marinakis, Y., Migdalas, A., Pardalos, P.: Expanding Neighborhood GRASP for the Traveling Salesman Problem, Computational Optimization and Applications, 3, 2005, s.231-257
- [50] Norback, J.P., Love, R.F., Geometric Approaches to Solving the Traveling Salesman Problem, Management Science, 11, 1977, s.1208-1223
- [51] Or, I.: Traveling Salesman-Type Combinatorial Problems and Their Relation to the Logistics of regional Blood Banking, PhD thesis, Department of Industrial Engineering and Management Sciences, Northwestern University, Evanston, IL, 1977
- [52] Paletta, G.: The Period Traveling Salesman Problem: a New Heuristic Algorithm, Computers & Operations Research, 19, 2002, s.1343-1352
- [53] Papadimitriou, C.H., Vazirani, U.V.: On Two Geometric Problems Related to the Traveling Salesman Problem, J. Algorithms, 5, 1984, s.231-246
- [54] Papadimitriou, C.H., Vempala, S.: On the Approximability of the Traveling Salesman Problem, In: Proceedings of the 32nd Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 2000
- [55] Pelikán, J.: Diskrétní modely v operačním výzkumu, Professional Publishing, Praha, 2001
- [56] Pelikán, J., Kořenář, V.: Časově omezený rozvozní problém, Firma a konkurenční prostředí, MZLU, Brno, 2007, s.114-118
- [57] Prim, R.C.: Shortest Connection Networks and Some Generalizations, Bell Syst. Tech. J., 36, 1957, s.1389-1401
- [58] Rosenkrantz, D.J., Stearns, Lewis, P.M.II: An Analysis of Several Heuristics for the Traveling Salesman Problem, SIAM J. Comput., 6, 563-581
- [59] Švasta, J.: Příspěvek k systému řešení okružního problému v podmínkách zemědělské výroby, Zeměd. Ekon., 24, 1978, s.723-737
- [60] Takenori, M., Naoki, M.: Comparison of Approximate Methods for Traveling Salesman Problem, IEIC Technical Report, 625, 2003, s.1-6

- [61] Toma, N., Endo, S., Yamada, K.: An immune co-evolutionary algorithm for n-th agent's traveling salesman problem, Computational Intelligence in Robotics and Automation, 3, 2003 s.1503-1508
- [62] Tsai, C.-F., Tsai, C.-W., Tseng, C.-C.: A New Hybrid Heuristic Approach for Solving Large Traveling Salesman Problem, Information Sciences – Informatics and Computer Science: An International Journal, 1-4, 2004, s.67-81
- [63] Turkensteena, M., Ghosh, D., Goldengorin, B., Sierksma, G.: Iterative Patching and the Asymmetric Traveling Salesman Problem, Discrete optimization, 1, 2006, s.63-77
- [64] Van der Cruyssen, P., Rijckaert, M.: Heuristic for the Asymmetric Traveling Salesman Problem, J. Op. Res. Soc., 30, 1978, s.697-701
- [65] Walshaw, C.: A Multilevel Approach to the Traveling Salesman Problem, Operations Research, 5, 2002, s.862-877
- [66] Webb, J.: An effective heuristic algorithm for the traveling salesman problem, Ops Res., 21, 1971, s.498-516
- [67] Zelikovsky, A.Z.: An $11/6$ -approximation Algorithm for the Network Steiner Problem, Algorithmica, 9, 1993, s.463-470

Přehled vlastních publikací

- [68] Kučera, P.: Habr Frequencies Approach to the Time Bounded Transportation Problem, Firma a konkurenční prostředí, MZLU Brno, 2007, s. 75-78
- [69] Kučera, P.: Klasifikace metod pro řešení jednookruhového okružního dopravního problému, Think Together, ČZU v Praze, 2005, s. 169-172
- [70] Kučera, P.: Methods for Solving the Vehicle Routing Problem, INPROFORUM, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2007, 5s.
- [71] Kučera, P.: Metoda stromů pro časově omezený rozvozní problém, Think Together, ČZU v Praze, 2006, 5s.
- [72] Kučera, P.: Metody pro víceokruhový okružní dopravní problém řešící celou úlohu najednou, Think Together, ČZU v Praze, 2007, 6s.
- [73] Kučera, P.: Multiplecriteria and Stochastic Traveling Salesman Problem – a Proposal of Methods for Solving, Acta oeconomica No 14 – Ekonomická teória a prax – dnes aj zajtra, Univerzita Mateja Béla Banská Bystrica, 2002, s. 47-49
- [74] Kučera, P.: Okružní dopravní problém a aproximační metody jeho řešení, Agrární perspektivy VIII., ČZU Praha, 1999, s. 642-644
- [75] Kučera, P.: Statistická analýza Mayerovy metody a modifikované Fernandez de la Vega-Luekerovy metody pro řešení víceokruhového okružního dopravního problému, Agrární perspektivy XIV., ČZU v Praze, 2005, s. 763-768
- [76] Kučera, P.: Tree Approach to the Time Bounded Transportation Problem, Mathematical Methods in Economics, Univerzita Hradec Králové, 2005, s. 217-220
- [77] Kučera, P.: Vícekriteriální a stochastický okružní dopravní problém - návrh metod pro jeho řešení, Agrární perspektivy X., ČZU v Praze., 2001, s. 744-747
- [78] Kučera, P.: Využití Habrových frekvencí při řešení víceokruhového okružního dopravního problému, Agrární perspektivy, ČZU v Praze XV., 2006, s. 723-726
- [79] Kučera, P., Beránková, M.: Aplikace Borůvkova algoritmu na víceokruhový okružní dopravní problém, Kvantitativní metody v ekonomii, ČZU v Praze, 2002, s. 88-93
- [80] Kučera, P., Beránková, M.: The Minimum Spanning Tree Approach to the Multiple tours Travelling salesman Problem, Mathematical and Computer Modelling in Science and Engineering, ČVUT Praha, 2003, s. 207-210
- [81] Kučera, P., Beránková, M., Houška, M., Švasta, J.: Iteration Methods for the Stochastic Traveling Salesman Problem, Mathematical Methods in Economics, Masarykova univerzita v Brně, 2004, s. 170-173
- [82] Kučera, P., Beránková, M., Houška, M., Švasta, J.: Stochastic costs in the traveling salesman problem. Quantitative Methods in Economics, University of Economics, Bratislava, 2004, s. 128-132
- [83] Kučera, P., Dömeová, L.: Comparing Various Heuristics for Special Types of the Vehicle Routing Problem, Increasing Competitiveness or Regional, National and International Markets, VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2007, 8s.

- [84] Kučera, P., Dömeová, L.: Řešení víceokruhového okružního dopravního problému modifikovanou Fernandez de la Vega – Luekerovou metodou, Kvantitativní metody v ekonomii, ČZU v Praze, 2002, s. 94-99
- [85] Kučera, P., Dömeová, L.: Řešení víceokruhového okružního dopravního problému se zřetelem na minimalizaci okruhů, Kvantitativne metódy v ekonómii a podnikaní - metodológia a prax v novom tisícročí, EU Bratislava, 2002, s. 74-77
- [86] Kučera, P., Dömeová, L.: Solution of the Multipletours Travelling salesman Problem with Vehicle Capacity Preference, Mathematical Methods in Economics, ČZU v Praze, 2003, s. 171-176
- [87] Kučera, P., Dömeová, L.: Využití metod pro řešení “bin packing” problému pro okružní dopravní problém, SYSTE 02 – System Engineering, Evida Plzeň, 2002, s. 135-144
- [88] Kučera, P., Houška, M., Beránková, M.: Methods for the Multipletours Traveling Salesman Problem Making the Final Solution in One Time, Mathematical Methods in Economics, University of West Bohemia in Pilsen, 2006, s. 313-316
- [89] Kučera, P., Houška, M., Houšková Beránková, M.: Selected Methods for the Time Limited Vehicle Routing Problem, Mathematical Methods in Economics, , 2008, 4 s.
- [90] Kučera, P., Kvasnička, R.: Statistical Analysis of Selected Methods for the Time Limited Vehicle Routing Problem Focused on the Problem Size, Agrární perspektivy XVII., ČZU v Praze, 2008, s. 691-694
- [91] Kučera, P., Mikulecký, M.: Statistical Analysis of Selected Methods for the Time Limited Vehicle Routing Problem, Agrární perspektivy XVI., ČZU v Praze, 2007, s. 1149-1154
- [92] Kučera, P., Švasta, J., Dömeová, L.: Řešení jednookruhového okružního dopravního problému metodou SVAMM se zavedením umělé asymetrie, Agrární perspektivy XIII., ČZU Praha, 2004, s. 609-613
- [93] Švasta, J., Dömeová, L., Kučera, P.: Podpůrná heuristika pro řešení okružního dopravního problému, New Trends in System Simulation, MARQ, 2004, s. 81-90
- [94] Švasta, J., Kučera, P.: Aplikace měkkých systémových metodologií v konstrukční modelové fázi, na příkladu kombinatorické úlohy (okružní dopravní problém), Medzinárodné vedecké dni, SPU Nitra, 2001, s. 779-784
- [95] Švasta, J., Kučera, P.: Zamyšlení nad třídami heuristik v analýze kombinatoricky orientovaných rozhodovacích prostorů, Firma a konkurenční prostředí, MZLU Brno, 2003, s. 250-261
- [96] Švasta, J., Kučera, P., Dömeová, L.: Modifikace metody SVAMM pro řešení okružního dopravního problému se symetrickou maticí sazeb, Firma a konkurenční prostředí, MZLU Brno, 2005, s. 154-161